

**LOGIKAI ELEMÉK ÉS
KAPCSOLÁSOK**



**GRÁFELMÉLETI
ALAPFOGALMAK**



**FÜGGELÉK:
Számítástechnikai rövidítés-szótár**

Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség
Tankönyv- és Taneszköztanácsa

LOGIKAI ELEMÉK ÉS KAPCSOLÁSOK



GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK



FÜGGELÉK: Számítástechnikai rövidítés-szótár

INFORMATIKAI SEGÉDKÖNYV
Kiegészítő fejezetek a középiskolai
Informatika és számítástechnika alapjai
tantárgy oktatásához.

Beregszász, 2004

A Segédkönyv megjelenését a
Magyar Köztársaság Oktatási Minisztériuma
támogatta

Kiadja a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség
Tankönyv- és Taneszköztanácsa

A kiadásért felel: Orosz Ildikó
Felelős szerkesztő: Gönczy Sándor
Borítóterv: Gönczy Sándor
Szaklektor: Pallay Dezső

© Balogh Sándor, 2004

Kereskedelmi forgalomba nem kerül

ANNOTÁCIÓ

A középiskolai informatikai tananyag két mellőzött fejezetének oktatásához és tanulásához nyújthat segítséget az első két fejezet.

A LOGIKAI ELEMELK ÉS KAPCSOLÁSOK c. fejezet alapfokon ismerteti a számítástechnikai, valamint algoritmizálási (programozási) szempontból fontosabb logikai műveleteket, továbbá konkrét példán mutatja be a matematikai logika és a gépi számolás kapcsolatát.

A GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK c. fejezet azoknak szól, akik először ismerkednek a matematikának – informatikának ezen egyre terebélyesedő ágával. A fejezet egyszerű példákon, kevés matematikával, halmazelméleti jelölések mellőzésével, vezeti be az olvasót a gráfok világába. A programozási nyelvek valamelyikében legalább alapfokon járatos érdeklődő számára világossá válik, miként lehet nyelvi adatstruktúrák segítségével (mátrix – tömb) leírni a gráfokat. Ez sok gyakorlati feladat gépi megoldását teszi lehetővé. Az elméleti ismertetést szemléltető példák és önálló megoldásra váró feladatok kísérik.

Az informatikai (számítástechnikai) szakirodalom olvasása közben az olvasó számtalan esetben találkozik olyan, általában, angol szavakból képzett rövidítésekkel, melyek érthetetlen titokzatosságukkal épp a lényeg megértését akadályozzák. A RÖVIDÍTÉS-SZÓTÁR c. rész ábécé sorrendben ezekből tartalmaz majdnem háromszázat eredeti jelentésük feltüntetésével és rövid magyarázattal.

A segédkönyv hasznos lehet az informatikát oktató középiskolai tanárok és diákok számára.

СП „ПоліПрінт”, м. Ужгород, вул. Тургенева, 2.
Зам. . Тираж

TARTALOM

ELŐSZÓ.....	7
LOGIKAI ELEMELK ÉS KAPCSOLÁSOK.....	11
1. A MATEMATIKAI LOGIKA FOGALMA	11
2. ÍTÉLETEK, LOGIKAI ÉRTÉKEK, ÖSSZETETT ÍTÉLETEK.....	12
3. LOGIKAI MŰVELETEK.....	13
4. NEGÁCIÓ, KONJUNKCIÓ, DISZJUNKCIÓ	13
5. IMPLIKÁCIÓ	15
6. EKVIVALENCIA.....	16
<i>FELADATOK:</i>	17
7. MATEMATIKAI LOGIKA ÉS A KETTES SZÁMRENDSZER.....	17
8. LOGIKAI MŰVELETEK ÁRAMKÖREI	21
9. SZÁMOLÓ ÁRAMKÖRÖK ÖSSZEÁLLÍTÁSA.....	23
10. LOGIKAI HÁLÓZATOK	24
GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK	27
1. BEVEZETÉS.....	27
2. NÉHÁNY GRÁFELMÉLETI JELÖLÉS	29
3. SZOMSZÉDSÁGI (CSÚCS-) MÁTRIX, ÉLMÁTRIX, SÚLYMÁTRIX	30
<i>GYAKORLÓ FELADATOK</i>	33
4. A FOKOK ÉS AZ ÉLEK SZÁMA KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉS.....	33
<i>GYAKORLÓ FELADATOK</i>	34
5. EGYSZERŰ GRÁFOK.....	34
<i>GYAKORLÓ FELADATOK</i>	35
6. ÚT, VONAL, SÉTA, KÖR.....	36
7. ÖSSZEFÜGGŐ GRÁFOK	41
<i>GYAKORLÓ FELADAT</i>	43

8. FÁK, ERDŐK	43
<i>GYAKORLÓ FELADATOK</i>	45
KIEGÉSZÍTŐ OLVASMÁNY	47
RÖVIDÍTÉSEK	50
FELHASZNÁLT IRODALOM	66

ELŐSZÓ

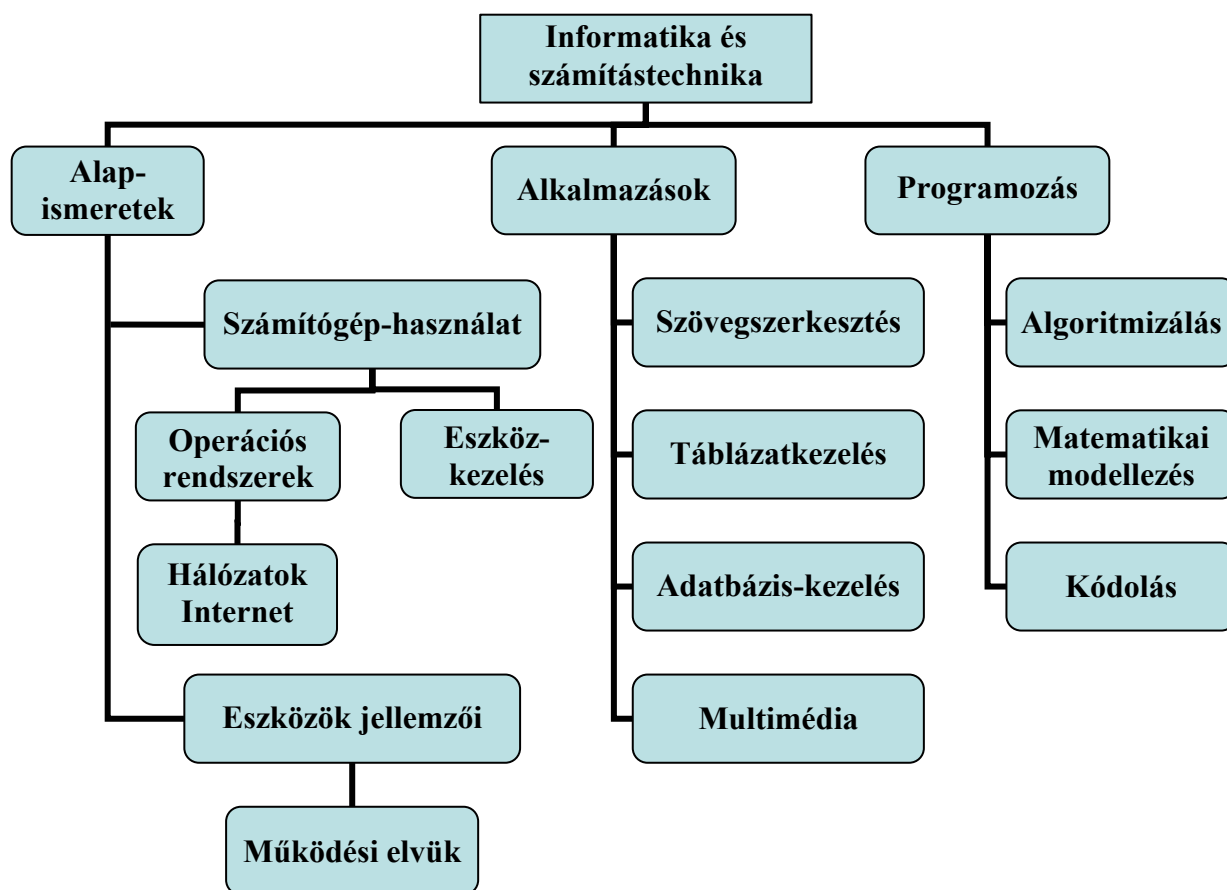
A didaktikailag hagyományos műveltségi területek között iskoláinkban 1985-ben jelent meg az Informatika és számítástechnika kötelező tantárgyként. Diákszemmel nézve, sőt a tanárok szemszögéből is, az eltelt időszak egy egész korszakot jelent. Mára sokan elmondhatják, hogy általános és középiskolai tanulmányaik időszaka az informatikai-képzés korszakára esett. Iskolatörténeti, valamint módszertani szempontból ugyanakkor ez még csak a vajúdás ideje. Nincs általánosan elfogadott, valamennyi iskolában egyaránt végrehajtható tanterv, nincs egységes tankönyv, melyre még egy olyan tantárgy oktatásához is szükség van, mely maga is az információ-szerzést, információ-tárolást és -feldolgozást hivatott szolgálni. A rendszernek ugyanis vannak eszközei, technikai háttere, optimális alkalmazási módszertana. Szükség van arra, hogy az iskola maximálisan közreműködjön e technikai eszközök használatának elsajátításában és e módszerek megismertetésében.

Az oly sokat emlegetett nemzedéki konfrontáció korunkban újabb adalékkal bővült. A diák szomorúan veszi tudomásul, hogy szűkebb családi környezete, megszámlálható kivételtől eltekintve, legtöbbször értetlenül áll a számítógéppel, annak alkalmazásával kapcsolatos kérdései előtt. Ennélfogva még nagyobb felelősség hárul az iskolára a számítástechnikai és informatikai ismeretek elsajátításának vonatkozásában.

E segédkönyvben tárgyalt témák kiválasztásában, melyek jellegüknél fogva legalább annyira matematikaiak, mint informatikaiak, döntő szerepet játszott, hogy sem a középiskolai matematika tankönyveink, sem pedig az eddig ukrán nyelven megjelent kísérleti informatikai tankönyveink nem tárgyalják e témákat. A füzetet eredetileg vázlatnak szántam saját magam és fakultatívan informatikát tanuló diákjaim számára. Az Informatika technikai hátterét biztosító számítógépek, azok periférikus egységei, és a rendszer másik jelentős erőforrása – a szoftverek, az egyik leggyorsabban változó terület, mely gyakorlati ismeretanyagában néhány év alatt elavul. E gyorsan változó rész mellett az elméleti háttér sokkal lassabban változik, s talán pár éven belül a választott témák is bekerülnek az iskolai tankönyvekbe.

A tanár számára igen nehéz az alapfeladat: egyrészt meg kell tanítania precízen a véleménye szerint állandónak ítélt ismereteket, másrészt, amin keresztül és segítségével megtanítja, azok állandóságát meg kell kérdőjeleznie, és szerepüket csak alkalmoszerűnek kell beállítania.

Az utóbbi években hirtelen szabadon hozzáférhetővé vált óriási mennyiségű adat értelmezését segítő technikákat mindenféleképpen el kell sajátítani a tanulókkal. Napjainkra már az alpműveltség részének tekinthető a számítógép kezelni tudása. Új lehetőséget jelent a számítógépes hálózatok hozzáférése, de az ezzel együtt jelentkező új problémák kiküszöbölését is meg kell oldani. Lényegében, az idetartozó ismereteket foglalja össze és oktatja a **számítástechnika**. A következő szerkezeti diagram az oktandó fő területeket mutatja:



Mindezen területek elfogadható szintű elsajátításához a rendelkezésre álló óraszámnál jóval több időre van szükség. Ezért merem ajánlani az egyes témakörök fakultációban történő oktatását (különös tekintettel a programozás témakörre).

A jelzett oktatási területek tartalmazznak olyan időtálló ismeretanyagokat, melyek tanulóink számára ez ideig nem voltak elérhetőek. Könnyen hozzáférhető, iskolai szintű tankönyv hiányában, a nem szakirányú képesítéssel rendelkező kollégák számára is problémát jelenthet bizonyos részletkérdések oktatása.

A könyvesboltok polcait nézegetve az a benyomásunk, hogy az utóbbi időben egyre több, szép kivitelű, vaskos könyv jelenik meg, melyek a „felhasználó” és a számítógép közötti kommunikációt hivatottak segíteni. Operációs rendszerek és hozzájuk idomított applikációk (alkalmazási programok), programozási nyelvek és adatbázis-kezelő programok véget nem érő leírásai ezek. E könyvek a felnőtt alkalmazók számára íródtak, és mivel mindenféle akadémiai jelleget nélkülöznek, iskolai felhasználásra nem igazán alkalmasak. Tény, hogy a tapasztalt oktató számára ez nem jelent leküzdhetetlen problémát. Élet- és szakmai tapasztalata alapján képes kiszűrni a rendelkezésre álló szakirodalomból a szükséges ismeretanyagot, és megfelelő formában a tanítványai elé tárni azokat. Csak éppen nincs mit a tanítványai kezébe adni nyomtatott formában, hogy otthon hagyományos módon, az elvontabb gondolkodást igénylő részeket memorizálhassák, netán önálló feladat-megoldások formájában begyakorolhassák.

Különösen érzékenyen érinti a tanárt és egyes ambiciózus tanítványait a felvetett probléma, ha a cél, az egyre intenzívebb felkészülést igénylő járási vagy területi informatikai versenyeken (olimpiákon) való részvétel. A felkínált feladatok sikeres megoldásának képessége megkívánja, hogy a tanuló jártasságot szerezzen a kötelező tananyag keretein túl olyan témakörökben, mint a matematikai logika és a gráfelmélet, legalább alapfogalmi szinten. A programozási témakörben (algoritmizálás, matematikai modellezés) mindenképpen találkozik a tanuló logikai szerkezetekkel, a gráfelmélet alapfogalmainak ismerete pedig egyszerűsíti sok gyakorlati feladat megoldását.

E két témában kíván segítséget nyújtani alapszinten tanárnak és diáknak egyaránt a következő két rövid fejezet. Az Informatika közismerten interdiszciplináris tudomány, felhasználja a matematika, logika, kibernetika, rendszerelmélet, automatizálás, szemantika, szemiotika és még sok más tudomány eredményeit

A LOGIKAI ELEMELK ÉS KAPCSOLÁSOK c. fejezetben az alapfogalmak, alapműveletek ismertetése után igyekeztem rámutatni a matematikai logika és a számítógép működési elvének kapcsolatára, legalábbis ami a számításokat illeti. Ez felhasználható az Alapismeretek tárgykör Működési elvük részében. Reményeim szerint diákok és kollégák egyaránt találnak itt néhány megjegyezésre érdemes gondolatot.

A GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK c. fejezet azoknak szól, akik először ismerkednek a matematikának – informatikának ezen egyre terebélyesedő ágával. A gráfelmélet eredményeit széles körben alkalmazzák a fizika, kémia, mérnöki tudományok, közgazdaságtan, de a pszichológia, nyelvészet és egyéb tudomány területein is. A téma ismerete elengedhetetlen a járási és megyei informatikai vetélkedők résztvevői számára.

A függeléként csatolt RÖVIDÍTÉS-SZÓTÁR a szakirodalomban gyakorta felbukkanó rövidítések (abbreviatúrák) eredeti jelentését és – szükség szerint – rövid magyarázatát tartalmazza, kivonatosan, a teljesség igénye nélkül.

LOGIKAI ELEMELK ÉS KAPCSOLÁSOK

1. A matematikai logika fogalma

Mindenekelőtt ismerkedjünk meg a logika szó jelentésével. A görög eredetű szó egy igen régi, már az ókorban is fejlett tudományág elnevezése, a gondolkodás, a helyes következtetések tudománya. Arisztotelész (i.e. 384-322) logikáról írt műve alapvető fontosságú volt, évszázadokon át tökéletes alkotásnak tartották. S talán épp ezért a logika módszerei gyakorlatilag hosszú időn keresztül alig változtak. A XVII. században G. W. Leibniz (1646-1716) gondolt modernizálásukra, de gondolatának általános megfogalmazásánál alig jutott tovább.

A matematika fejlődése a helyes logikai következtetések alaposabb vizsgálatát kívánta. Ez a XIX. század folyamán a matematikai logika kialakulásához vezetett. George Boole (ejtsd: dzsorzs búl, 1815-1864) angol matematikus fogalmazta meg először a logikai törvényeket a matematika nyelvén. A számunkra ismerős algebrától eltérően nem számokat, hanem ítéleteket (*igaz* vagy *hamis állításokat* – lásd a továbbiakban) jelölt betűkkel, és bebizonyította, hogy az algebrai egyenletekre hasonlító logikai egyenletekkel összetett ítéletek igaz vagy téves voltára lehet következtetni. Arra törekedett, hogy lehetővé váljon a logikai következtetések teljesen mechanikus levezetése. Boole halálának évszámából nyilvánvaló, hogy vizsgálatait nem elektronikus számítógépek áramköreire végezte. Mindazonáltal a két logikai érték (igaz – hamis), valamint a bináris (kettes) számrendszer két számjegye (1 – 0) közötti mennyiségi azonosság szinte önmagát kínálja a számítások logikai műveletekkel történő végzésére. A számítógépek szempontjából az sem elhanyagolható tény, hogy a gépi adatábrázolás nagyon egyszerűen megvalósítható kétállapotú elektromos elemek sorozatával.

A matematikai logika tételeit elektromos problémák megoldásához először C. Shannon alkalmazta jelfogós (relés) kapcsolóáramkörök számításánál, és azóta is egyik legfontosabb matematikai eszköze a digitális (ang. *digit* – számjegy) berendezések tervezésének (lásd 8. pont).

Bár a matematikai logika egyes fogalmai Arisztotelészig vezethetők vissza, módszerében, fogalmaiban (műveletek, azonosságok, logikai függvények), jelöléseiben azonban már matematikai.

2. Ítéletek, logikai értékek, összetett ítéletek

A logikában a kijelentő mondatok alapvető fontosságúak, alapfogalmak. Azokat a kijelentő mondatokat, melyekről egyértelműen megállapíthatjuk, illetve feltételezhetjük, hogy vagy igazak, vagy hamisak, *ítéletnek* nevezzük. Az elemi algebra a "Mennyivel egyenlő?" kérdésre keresi a választ, a Boole-algebra feladata viszont annak az eldöntése, hogy "Igaz-e az A-val vagy B-vel jelölt ilyen vagy olyan állítás?"

Néhány példa ítéletekre:

- A 2 páros szám. (A)
- Ma kedd van. (B)
- Ez a négyszög téglalap. (C)
- A 2 prímszám. (D)
- A téglalap átlói egyenlők. (E)
- A zsebemben van 10 hrvnya. (F)
- Megveszem az Ady-kötetet. (G)
- Most esik az eső. (H)

A felsorolt 8 kijelentő mondat mind ítélet. Ezek közül némelyek igazak, némelyek hamisak.

A következőkben azt, hogy egy ítélet igaz vagy hamis, az ítélet logikai értékének nevezzük. Egy ítélet tagadásával vagy több ítélet valamilyen nyelvtani összekapcsolásával (esetleg kismérvű nyelvi átfogalmazásával) új ítéleteket képezhetünk.

Néhány példa ítéletek összekapcsolásával új ítéletek (összetett ítéletek) megfogalmazására:

- a) Ez a négyszög nem téglalap:Nem (C)
- b) Ma kedd van, és most esik az eső:(B) és (H)
- c) A 2 páros szám vagy prímszám:(A) vagy (D)
- d) Ha ez a négyszög téglalap, akkor átlói egyenlők: Ha (C) akkor (E)
- e) Az Ady kötetet akkor és csak akkor veszem meg,
ha a zsebemben van 10 hrvnya:(G) akkor és csak akkor, ha (F)

A felírt új ítéletek logikai értéke függ az összekapcsolás módjától, és azoknak az ítéleteknek a logikai értékétől, amelyek segítségével azokat megfogalmaztuk. Új ítéleteknek ily módon való képzését *logikai műveleteknek* nevezzük.

A matematikai logikának azt a részét, mely a logikai műveletekkel foglalkozik, *ítéletkalkulusnak* nevezzük.

3. Logikai műveletek

Táblázatban röviden összefoglaljuk a számunkra fontos öt logikai művelet elnevezését, jelét, a jelölés olvasását:

- a) Negáció, jele \neg ; példa: $\neg P$, olvasása: nem P; (*ang.* (not(P)));
- b) konjunkció, jele: \wedge vagy *; példa: $P*Q$, olvasása: P és Q; (*ang.* P and Q);
- c) diszjunkció, jele: \vee vagy +; példa: $P+Q$, olvasása: P vagy Q; (P or Q);
- d) implikáció, jele: \Rightarrow ; példa: $P\Rightarrow Q$, olvasása: ha P, akkor Q;
- e) ekvivalencia, jele: \Leftrightarrow ; példa: $P\Leftrightarrow Q$, olvasása: P akkor és csak akkor, ha Q.

MEGJEGYZÉS:

A konjunkciót logikai szorzásnak, a diszjunkciót logikai összeadásnak is szokták nevezni. A továbbiakban a konjunkciót '' -gal, a diszjunkciót '+' -al fogjuk jelölni!*

A negáció egy ítéletből, a többi két ítéletből képeznek új ítéletet. Összetett ítéletek képezhetők még több ítéletből. Attól függően, hogy egy, két, három ítéletből képezünk egy új ítéletet, egy-, két-, háromváltozós műveletről beszélünk.

A műveletek további tárgyalása során sokszor elvonatkoztatunk a kijelentő mondatok nyelvi tartalmától, azaz csupán a logikai értékükkel törődünk. Ilyenkor logikai változókról beszélünk, melyek két lehetséges értéket vehetnek fel: i-t (igaz) és h-t (hamis). A logikai műveleteknek a későbbiekben tárgyalt gépi számolásra történő alkalmazhatóságának egyszerűbb megértése érdekében a továbbiakban logikai értéként inkább az 1 és 0 bináris jegyeket fogjuk használni.

4. Negáció, konjunkció, diszjunkció

A logikai műveletek eredményét általában úgynevezett értéktáblázattal adják meg. A negáció egyváltozós művelet.

A negációt bemutató értéktáblázat:

A	$\neg A$
i	h
h	i

vagy

A	$\neg A$
1	0
0	1

A konjunkció értéktáblázata:

A	B	A*B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A diszjunkció értéktáblázata:

A	B	A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Egy művelet eredményével ismét végezhetünk műveleteket. Logikai változókat, műveletjeleket - szükség esetén zárójeleket is – tartalmazó jelsorozatokat az *ítélekalkulus formuláinak* nevezzük. A logikai változók betűjelei tetszőlegesek. A következőkben néhány formula logikai értékét határozzuk meg. Ennek legegyszerűbb módja értéktáblázat készítése a formulában szereplő változók minden lehetséges értéke esetére.

Nézzük a következő példákat:

- a) $\neg(\neg P)$; c) $P+(Q*R)$;
 b) $\neg P+Q$; d) $(P+Q)*(P+R)$.

a) A $\neg(\neg P)$ formula értéktáblázata:

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
1	0	1
0	1	0

b) A $\neg P+Q$ formula értéktáblázata:

P	$\neg P$	Q	$\neg P+Q$
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1

c) A $P+(Q*R)$ – és – d) $(P+Q)*(P+R)$ kifejezések értéktáblázata:

P	Q	R	$Q*R$	$P+(Q*R)$	$P+Q$	$P+R$	$(P+Q)*(P+R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Meglepő eredményhez jutottunk: a c) és d) példa két formulája ugyanazt az eredménytáblázatot adta. Így a két formula azonos: $P+(Q*R) \equiv (P+Q)*(P+R)$.

Az ilyen formulákat (vagy a megfelelő összetett ítéleteket) egyenértékűeknek mondjuk.

5. Implikáció

Az implikáció $P \Rightarrow Q$ jelét több módon is olvashatjuk, például: ha P, akkor Q, vagy P implikálja Q-t, vagy P elegendő feltétele Q-nak, vagy P-nek szükséges feltétele Q. Az implikáció „ha és akkor” kötőszava feltűnően két részre bontja az ítéletet. P-t az implikáció előtagjának, Q-t utótagjának nevezzük. Az előtag igaz logikai értékénél az implikáció logikai értékét az utótag igaz vagy hamis logikai értéke határozza meg. Az azonban kérdéses lehet, hogy mi lesz az implikáció logikai értéke, ha az előtag logikai értéke hamis.

Megállapodtak abban, hogy hamis előtag esetén - az utótag logikai értékétől függetlenül - az implikáció igaz.

Az implikáció értéktáblázata:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Amint az előző pont b) példájának értéktáblázata és az implikáció értéktáblázata összehasonlításából látszik $P \Rightarrow Q \equiv \neg P + Q$. Ez azt jelenti, hogy az implikáció negációval és diszjunkcióval kifejezhető.

6. Ekvivalencia

Ekvivalenciának azt a logikai műveletet nevezzük, melynél két ítéletet, például P-t és Q-t, úgy kapcsolunk össze, hogy fennáll a $P \Rightarrow Q$ és $Q \Rightarrow P$ implikáció is. Jelölése, mint már tudjuk: $P \Leftrightarrow Q$.

Az ekvivalenciát kétirányú implikációnak is tekinthetjük, így a $P \Leftrightarrow Q$ ekvivalenciát olvashatjuk így is: P szükséges és elegendő feltétele Q-nak vagy Q szükséges és elegendő feltétele P-nek.

A $P \Leftrightarrow Q$ ekvivalencia logikai értékét akkor és csak akkor tekintjük igaznak, ha P is és Q is igaz vagy P is és Q is hamis.

Az ekvivalencia értéktáblázata:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A definíció alapján az ekvivalenciának az implikációval és a konjunkcióval való kapcsolatát is felírhatjuk:

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) * (Q \Rightarrow P).$$

A logikai műveletek között szoros kapcsolatok vannak. Mint láttuk, az ekvivalencia kifejezhető implikációval és konjunkcióval, az implikáció viszont felírható negációval és diszjunkcióval.

Értéktáblázatok segítségével könnyen igazolhatók az alábbi nevezetes azonosságok (egyenértékű formulák), melyeket felismerőjükről Augustus de Morgan (1806-1871) angol matematikusról de Morgan azonosságoknak neveznek:

$$\text{a) } \neg(P * Q) \equiv \neg P + \neg Q; \quad \text{b) } \neg(P + Q) \equiv \neg P * \neg Q$$

Az összetett ítéletek fontos csoportját alkotják az azonosan-igaz és az azonosan-hamis ítéletek. Ezen összetett ítéletek logikai értékei függetlenek a bennük szereplő egyszerű ítéletek logikai értékeitől. Azonosan-igaz ítéletek például: $A + \neg A$, $A \Rightarrow A$, $A * B \Leftrightarrow B * A$ stb. Azonosan-hamis ítéletek: $A * \neg A$, $A * \neg B * (A \Rightarrow B)$ stb.

Összeadó táblázat
Bináris számokra

$A + B =$	$\overline{C'C}$
$0 + 0 =$	00
$0 + 1 =$	01
$1 + 0 =$	01
$1 + 1 =$	10

Nézzük meg az összeadó táblázatot! Jelöljük a két összeadandó egyjegyű bináris számot A-val és B-vel, valamint jelöljük az összeget $\overline{C'C}$ -vel, amiből a C' az átvitel, és C az összeg egyes helyértéke. A számtani összeadás tehát:

$$A + B = \overline{C'C}$$

alakú lesz. Ebből a C'-t egyszerűen előállíthatjuk, ha az A és B számokra alkalmazzuk a logikai szorzás műveletét:

$$C' = A * B \dots\dots\dots (1)$$

A C értékét a „kizáró vagy” művelettel lehet előállítani:

$$C = (\neg A * B) + (A * \neg B), \text{ azaz } C = A \oplus B \dots\dots\dots (2)$$

Egyjegyű bináris számokat tehát összeadhatunk logikai műveletek segítségével. Többjegyű bináris számok összeadásánál az itt megismert műveleteket kell a legalacsonyabb helyértékkel kezdve sorozatosan alkalmazni, úgy ahogy azt kézi számolásnál tesszük. Az egyetlen gondot az okozza, hogy többjegyű számok összeadása közben - az egyes helyértéktől eltekintve - valahányszor az előző helyértéktől átvitel van, három számot kell összeadni. Ezt az (1) és (2) formulák kétszeri alkalmazásával érjük el. Előbb a két összeadandót adjuk össze, majd összegükhöz hozzáadjuk az előző helyértéken keletkezett átvitelt. Itt akár az első, akár a második lépésben keletkezhethet átvitel (mindkettőben egyszerre nem). Ezeket „vagy” művelettel összekapcsolva megkapjuk a teljes összeadás átvitelét a következő, magasabb helyértékre.

Jelölje A(i) és B(i) két bináris szám (A és B) egymásnak megfelelő valamely helyértékét, C'(i-1) pedig az előző helyértéktől származó átvitelt. Jelölje C(i1) és C(i2) a két félösszeadás során keletkezett átvitelt, S(i) az A(i) és B(i) számok összeadásakor az átvitel nélküli összeget, C(i) a teljes összeadás átvitel nélküli összegét, és végül C'(i) az összeadás végén keletkező átvitelt, akkor az összeadás logikai műveletekkel:

$$A(i) * B(i) = C(i1) \text{ és}$$

$$A(i) \oplus B(i) = S(i), \text{ vagy másképpen } [\neg A(i) * B(i)] + [A(i) * \neg B(i)] = S(i);$$

majd ezek alkalmazásával :

$$S(i) * C'(i-1) = C(i2) \quad \text{és}$$

$$S(i) \oplus C'(i-1) = C(i), \text{ azaz } [\neg S(i) * C'(i-1)] + [S(i) * \neg C'(i-1)] = C(i),$$

s végül :

$$C(i1) + C(i2) = \underline{C'(i)}.$$

			i	i-1	
	1	0	1	1	0
=A					
=B					
			0	1	0
C'(i)=1			C(i)		C'(i-1)

PÉLDA: Legyen $C'(i-1) = 0$;

$A(i) = 1$; $B(i) = 1$.

$C(i1) = A(i) * B(i) = 1*1 = 1$;

$S(i) = A(i) \oplus B(i) = 1 \oplus 1 = 0$;

$C(i2) = S(i) * C'(i-1) = 0*0 = 0$;

$C(i) = S(i) \oplus C'(i-1) = 0 \oplus 0 = 0$;

$C'(i) = C(i1) + C(i2) = 1 + 0 = 1$;

(ahol: $*$ = and, $+$ = or, \oplus = xor) .

Az összeadás logikai modelljének jelentősége abban van, hogy a logikai műveletek végrehajtására néhány dióda, esetleg tranzisztor felhasználásával elektronikus áramköröket építhetünk, amelyek nagy sebességgel végzik el az összeadási műveleteket.

Felvetődik a kérdés, hogy ezek az áramkörök, vagy ami ugyanazt jelenti az összeadásra felírt logikai összefüggések alkalmasak-e kivonásra? Fogadjuk el külön bizonyítás nélkül, hogy közvetlenül nem. Valójában mégis ezeket a formulákat (számítógépben áramköröket) használjuk kivonásra, ehhez azonban újfajta kivonási módszert kell megismernünk. A módszer lényege, hogy a kivonandót átalakítjuk (lényegében kódoljuk) olyan számmá, amit a kisebbítendőhöz HOZZÁADVA kapjuk meg a kivonás eredményét. Ezt az átalakítást komplementálásnak és a keletkezett számot az eredeti szám komplementálásának (magyarul kiegészítő számának) nevezzük.

A komplementálás a kettes számrendszerben egyszerű feladat, mind papíron, mind áramkörrel egyszerűen elvégezhető, így a meglévő összeadó áramkörök mellett nem szükséges bonyolult kivonó áramkörök beépítése.

A komplement kódra épített számolásban tehát nem létezik kivonás, mint művelet, csupán összeadás. Ez a lehetőség burkoltan benne van az algebrai szabályokban, a műveleti jelet használhatjuk előjelként, és viszont. Például: $a - b = a + (-b)$.

A komplementálást először 1-nél kisebb szám (tört) esetére vizsgáljuk meg. Valamely „a” bináris törtszám komplementjét „ a_k ”-val jelölve, azt a következőképpen definiáljuk:

$$a_k = \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0 \text{ ("a" pozitív szám)} \\ 10(B) - abs(a), & \text{ha } a < 0 \text{ ("a" negatív szám)} \end{cases}$$

Az átalakítást kétféle módon is elvégezhetjük:

a) a negatív szám minden egyes 0-ját 1-esre és minden 1-esét 0-ra változtatjuk, majd az így kapott számhoz hozzáadunk 1-et;

b) a legkisebb helyértéktől indulva megkeressük az első 1-es számjegyet, ezzel bezárólag a számjegyeket változatlanul hagyjuk, de ettől balra minden 0-t 1-re és minden 1-et 0-ra változtatunk.

PÉLDÁK: - 0,1010 komplemente 1,0110;
 - 0,0101 komplemente 1,1011.

Nem nehéz ráismerni, milyen logikai művelettel végezhető el a komplementálás. Az a) módszer első lépése nem más, mint a logikai értéként kezelt számjegyek egyenkénti negációja, amit az 1 hozzáadása követ; a b) módszer esetében pedig csupán arról kell gondoskodnunk, hogy a számjegyek cseréjét végző áramkör mindaddig ne működjön, míg a legalacsonyabb helyértéktől elindulva az első 1-ig el nem jutott.

A komplementekkel végzett műveletek előjelhelyesen adják az eredményt. Ha az eredmény pozitív, az egészrész egyes helyértéke 0, eggyel magasabb helyértéken kapunk 1-et, azt túlcsoordulásnak nevezzük, és el kell hagynunk, ha pedig negatív, az egészrész 1 lesz. A negatív eredményt visszakomplementálhatjuk a megismert a) és b) eljárások bármelyikével, mert a komplementálás olyan művelet, amelyet kétszer alkalmazva az eredeti számot kapjuk vissza.

A komplementálás törtszámokra alkalmazott elve könnyen kiterjeszthető egész, vagy vegyes számokra is: egyszerűen törtté alakítjuk azokat. Az összeadás végrehajtásának megkezdése előtt kiválasztjuk azt a számot, amelynek egész része a legnagyobb, majd a bináris vesszőt annyira mozdítjuk el balra, hogy ebből bináris tört legyen. Ugyanannyival kell elmozdítani az összes többi szám bináris vesszőjét is. Elvégezzük az összeadást, majd az eredményben az eredeti helyére helyezzük vissza a bináris vesszőt, így visszaállítjuk a helyes nagyságrendet.

PÉLDÁK:

1) Végezzük el az $101,01 - 11,10$ kivonást!

A bináris vesszőt áthelyezzük: $0,10101$ és $0,01110$.

A kivonandó komplemente: $1,10010$.

A művelet most már összeadás: $0,10101 + 1,10010 = 10,00111$.

A túlcsoordulást (1) elhagyva, az előjeljegy 0, azaz a szám pozitív, és a bináris vesszőt eredeti helyére írva kapjuk, hogy $1,11$. (Valóban, tízes számrendszerben $5,25 - 3,5 = 1,75$).

2) Végezzük el a kivonást: $11110 - 110101$ (Decimálisan: $30 - 53 = -23$).

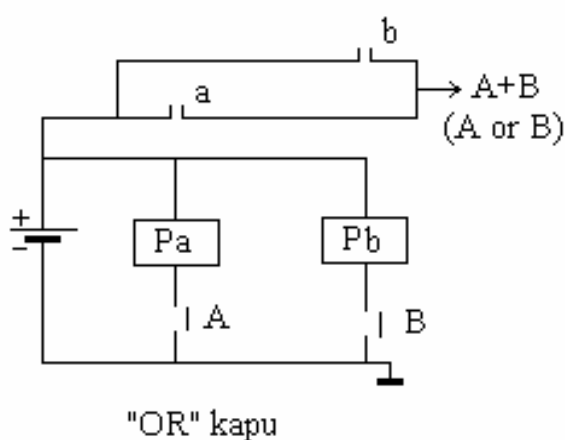
11110	0,011110	0,011110	
<u>-110101</u>	<u>-0,110101</u>	Komp.+1,001011	Vissza a vessző
?????	A bináris vessző átvitele	Negatív 1,101001	Komp. -0,010111=>-10111=-23(D)

Ami a többi aritmetikai műveleteket (szorzás és osztás) illeti könnyen belátható, hogy a szorzás nem más, mint a részletszorzatok megfelelő helyérték-eltolással való leírása és összeadása, azaz a szorzás is elvégezhető az összeadással. Az osztást kell még megvizsgálnunk. Ezt viszont sorozatos kivonással tudjuk helyettesíteni, csupán meg kell számlálnunk, hogy a kivonást hányszor tudtuk végrehajtani. Ez egyben azt is jelenti, hogy minden számolási művelet az összeadásra vezethető vissza.

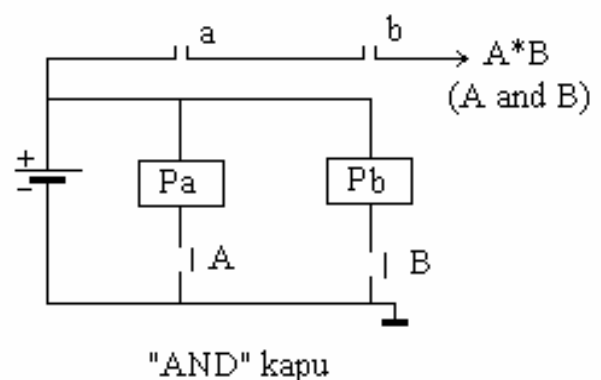
8. Logikai műveletek áramkörei

George Boole "A gondolkodás törvényeinek vizsgálata" című könyve a XIX. sz. század közepe táján jelent meg, algebrájának gyakorlati alkalmazására azonban csak 1938-ban került sor. Az 1916-ban született amerikai mérnök és matematikus Claude Shannon (ejtsd: klód senon) ismerte fel még egyetemista korában, hogy a matematikai logika kiválóan alkalmazható a jel fogós- (relés-) és kapcsolóáramkörök elemzése során. Az IGAZ (1-es) logikai értéként a "Van jel" (pl. feszültség, áram stb.), a HAMIS (0) logikai értéként a "Nincs jel" állapotot fogadta el.

Azokat az áramköröket, amelyeknek a bemenetei és kimenetei között logikai függvénykapcsolat áll fenn, logikai áramköröknek nevezzük. Ezek az áramkörök az információ legegyszerűbb átalakítói.



1. ábra

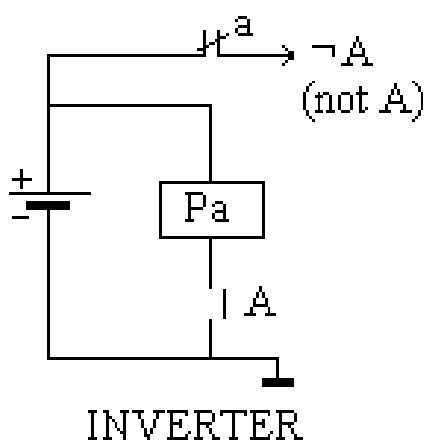


2. ábra

A három logikai alpművelet (diszjunkció, konjunkció és negáció) áramköri megvalósítása a legszemléletesebben reléket tartalmazó áramkörökkel mutatható be (lásd az 1., 2. és 3. ábrákat):

Az elektronikus számítógépek logikai áramköreit félvezető diódák, tranzisztorok, az utóbbi 30 évben integrált áramkörök segítségével valósítják meg.

Az "OR" és "AND" műveleteket megvalósító áramköröket kapuáram-



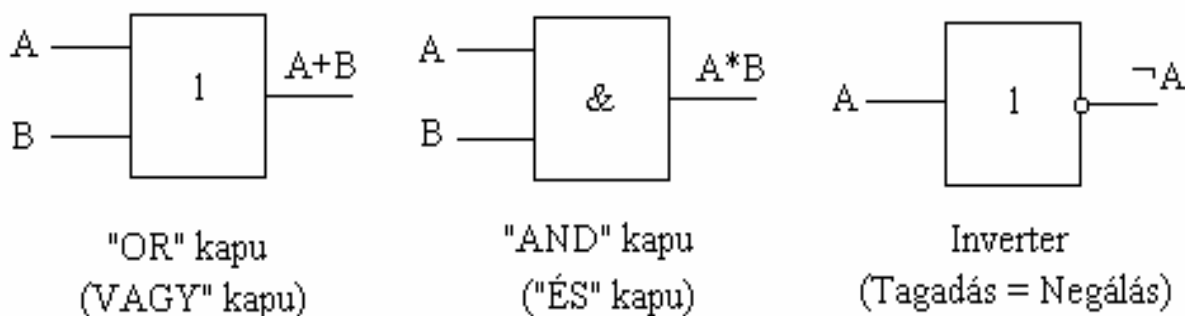
3. ábra

köröknek vagy röviden csak kapuknak szokás nevezni, mert a gépek működése közben gyakran a működéshez szükséges jelek, illetve a műveletekben résztvevő számok gépen belüli mozgását szabályozzák, mintegy kapu módjára nyílnak vagy záródnak ezek útjában.

A negációt megvalósító áramkört idegen szóval inverternek hívják.

A számítógépek részegységeinek tervezésénél nem kell feltétlenül az alapvető áramköri elemekkel kezdeni a logikai sémát, helyettük a logikai

áramkörök egységes jelöléseinek felhasználásával kapuáramkörökből és inverterekből állítják össze az egységet, majd ezt bontják le "alkatrészekre". A logikai áramkörök jelölései a 4. ábrán láthatók:



4. ábra

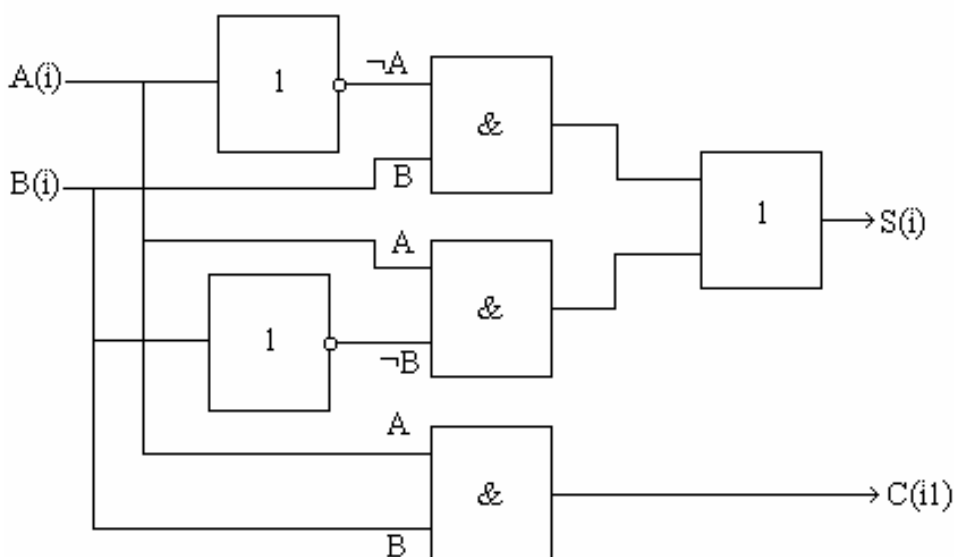
A tagadás ritkán fordul elő önálló műveletként, minden más logikai művelettől függetlenül, ezért jelölését, úgy alakították ki, hogy a kétváltozós logikai műveletek jeleire is illeszthető legyen. A megfelelő bemenethez

vagy kimenethez rajzolt kis kör jelzi, hogy az adott változót változatlan vagy tagadott formájában visszük be az áramkörbe, illetve a kimeneten megjelent eredményt változatlanul vagy tagadva visszük tovább.

9. Számoló áramkörök összeállítása

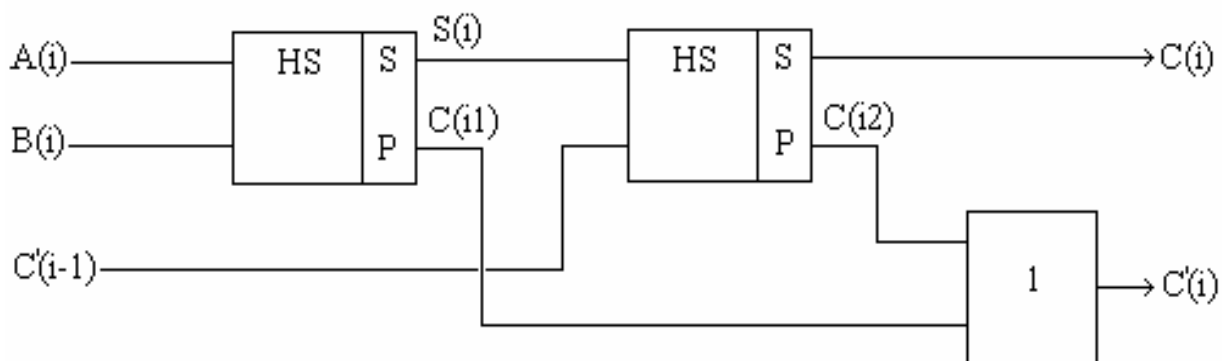
Korábban felírtuk logikai műveletekkel a bináris összeadást (7. pont). Most ezt a logikai műveletsort kell áramkörre alakítanunk, hogy az összeadás áramkörét megismerhessük. Első lépésben a félösszeadót, illetve a félösszeadás műveletsorát írtuk fel: $A(i)*B(i) = C(i1)$ és $A(i)\oplus B(i) = \neg A(i)*B(i)+A(i)*\neg B(i) = S(i)$.

Az 5. ábra a megismert áramköri jelölésekkel a félösszeadót ábrázolja.



5. ábra

A teljes összeadásról elmondtuk, hogy elvégezhető két lépésben félösszeadók segítségével, ilyenkor azonban az első lépésben keletkező átvitelt és az előző helyértéktől érkező átvitelt valamilyen késleltető vagy tároló áramkörrel meg kell őriznünk a második összeadási lépés idejére. A 6. ábra a kétlépéses összeadás elvét ábrázolja (a "HS" jelű tömbök a félösszeadót jelképezik, "S" az összeg, "P" az átvitel).



6. ábra

A félvezetős (tranzisztoros, integrált áramkörös) logikai áramkörök működéséhez (ellentétben a relés modellel) a logikai változókat hordozó jelek rövid időtartamú feszültségimpulzusok. Mivel a számítógépben elengedhetetlen, hogy az információt hordozó feszültség szintek hosszabb ideig rendelkezésre álljanak, ú.n. tároló áramkörökre is szükség van. A tároló áramkörök a bemenetükre rövid időtartamú impulzus formájában érkező információt elraktározzák, és lehetővé teszik további felhasználását.

10. Logikai hálózatok

A megismert logikai áramkörökből: a negálást végző inverterből, kapukból és a tárolókból, tetszőleges bonyolultságú rendszerek, ú.n. logikai hálózatok állíthatók össze. Ilyen értelemben véve egyetlen logikai hálózatnak tekinthető egy digitális számítógép is. A számítógép működésének könnyebb megértése szempontjából célszerű a számítógépet nem egyetlen bonyolult hálózatnak, hanem több, egyszerűbb részhálózatból felépített rendszernek tekinteni. Ezek közül a részhálózatok közül vizsgáljuk meg röviden azokat, melyek az alapvető ismeretek elsajátításához szükségesek.

Kódátalakítók. A számítógép-technikában gyakran előforduló jelenség, hogy két összekapcsolandó részegység kódja különböző, így a két berendezés közvetlenül nem kapcsolható össze. Az összekapcsolás csak úgy végezhető el, ha az egyik egység kódszavait átalakítjuk a másik megfelelő kódszavaivá. Az átalakítást egy meglehetősen bonyolult, sok inverterből és kapuáramkörből álló, logikai hálózat végzi. Ez a kódátalakító.

Dekóderek. Egy számítógép központi egységéhez 8 – 15 darab I/O egység (periféria) kapcsolódik. Ha a gépen futó program bevitelt vagy kihozatalt kíván, szükséges, hogy a kívánt perifériát ki lehessen jelölni.

Ennek szokásos módja, hogy a perifériákhoz egy-egy bináris számot, ú.n. perifériacímet rendelnek. A központi feldolgozó egység kiküldi az összes perifériához az aktuális perifériacímet, és az, amelyik saját címét „érezkelet”, a központi egységhez kapcsolódik. Ezt az „érezkelet” oldja meg egy viszonylag egyszerű felépítésű logikai hálózat a dekóder.

Aritmetikai-logikai hálózat. A számítógép aritmetikai-logikai egységében folyik az aritmetikai (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és a logikai (AND, OR stb.) műveletek elvégzése az adatok között. A műveletek gépi megvalósítására két lehetséges megoldás kínálkozott: minden műveletre külön áramkört készíteni, vagy egyetlen, természetesen bonyolultabb, áramkörrel végeztetni valamennyi műveletet. A logikai áramkörök tervezői ez utóbbi megoldást választották. Ennek a hálózatnak a neve: aritmetikai-logikai hálózat (ALH). Hogy a bemeneti adatokon elvégezhető műveletek közül az ALH melyiket végezze el, azt a műveletvezérlő kód dönti el. E kódot a számítógép központi vezérlőegysége állítja elő az utasítás műveleti kódrésze alapján (dekódolja).

Regiszterek. A tárolókat csak speciális esetben használják önállóan, „egyesével”, belőlük általában tárolócsoportokat szerveznek. A tárolócsoport egy adott hosszúságú bináris információ tárolására alkalmas. Ez a regiszter. A regiszterek hosszúsága (a benne levő tárolók száma) a számítógép típusától függ. Ez lehet 8, 16, 32 vagy 64. Egy tároló egy bináris jegy tárolását végzi. A regiszterek speciális típusa a léptetőregiszter. Ez a bináris információt egy bittel eltolva tárolja. Ennek szerepe az osztás és a szorzás műveletek végrehajtásakor van.

Tárak. Nagy mennyiségű információ tárolására nagyszámú regiszterből álló regisztercsoport szolgál. Az ilyen regisztercsoport neve: tár. A tárat alkotó regiszterek neve: rekesz. A rekeszek azonosítására azok sorszáma az ún. tárcím szolgál. A mai számítógép-technikai gyakorlatban általában a 16 és 32 bites rekeszeket alkalmazzák. Aszerint, hogy a tárba hányszor lehet új információt beírni, kétféle tártípus létezik: az írható-olvasható (RAM) és a csak olvasható tár (ROM).

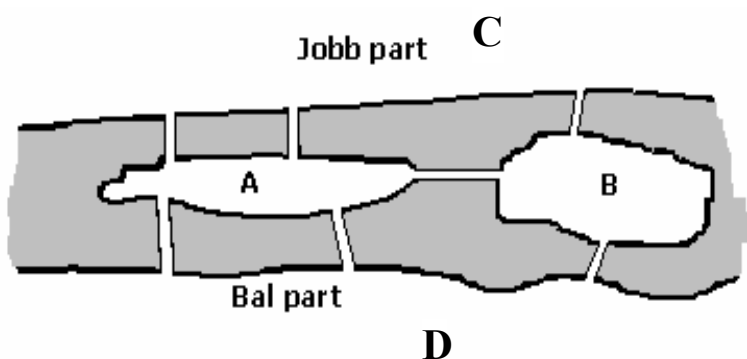
Órajelgenerátor. A számítógépet alkotó egységek, alegységek és áramkörök működésének meghatározott módon szinkronban kell lenniük. A szinkronizmus úgy biztosítható, ha minden egység és áramkör csak egy központi vezérlőjel (vezérlőimpulzus) hatására működhet. Ezeket az impulzusokat órajeleknek, az őket előállító áramköröket órajelgenerátornak nevezzük.

Számláló. Gyakran előforduló feladat, hogy bizonyos folyamatok, állapotok sorozatában (például a számítógép utasítás-végrehajtási sorozata, adatbevitel vagy kihozatal) a lejátszódó jelenségek számát meg kell állapítani, figyelni kell. A jelenségek létrejöttét mindig órajel váltja ki; a jelenségek számlálására legegyszerűbb tehát az azokat kiváltó órajeleket megszámlálni. Erre a célra szolgálnak a számláló áramkörök, röviden számlálók.

GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK

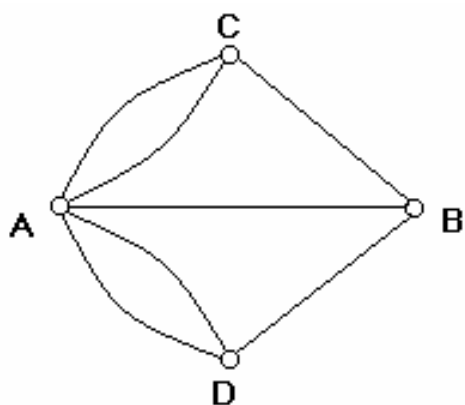
1. Bevezetés

Matematika-történeti források szerint az első gráfelméleti munka a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményeiben jelent meg 1736-ban, mikor is Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus, aki ekkor az akadémia meghívására Oroszországban dolgozott, megoldotta a Königsbergi-hidak problémáját. Königsberg a Balti-tenger Gdanski öble közelében a Pregolja (Pregel) folyó két partján és a folyó két szigetén terült el. A folyó A és B szigeteit hidak kötötték össze egymással és a partokkal is (C, D, 1. ábra).



1. ábra

Felvetődött a kérdés, hogy valaki a lakásából elindulva tehet-e olyan sétát, hogy minden hídon pontosan egyszer menjen át és a séta végén hazaérjen. Euler lényegében teljes általánosságban oldotta meg a feladatot. A feladatban, ugyanis, mindössze a hidakon való áthaladás, valamint a kiindulópontba való visszatérés a lényeg. Ezért Euler egy olyan



2. ábra

ábrát készített, melyben a városrészeknek pontok, a hidaknak a pontokat összekötő vonalak (nem feltétlenül egyenesek) felelnek meg (2. ábra).

Az ilyen pontokból és vonalakkból álló alakzatokat gráfoknak nevezzük. A pontok a gráf *csúcsai* vagy *szögpontjai*, a vonalak a gráf *élei*¹.

A kérdés tehát így fogalmazható meg: Valamely csúcsból kiindulva bejárhatjuk-e a gráf éleit úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk át, és végül a kiindulási pontba érjünk vissza?

¹ A gráfelméleti fogalmaknak a halmazelmélet nyelvén megfogalmazható általánosabb és pontosabb definíciója helyett mindvégig maradunk ezen egyszerű meghatározás mellett.

Található-e valamilyen kritérium (ismérv – megkülönböztető tulajdonság), mely alapján egyértelműen eldönthető a kérdésre adandó válasz?

Ha valaki a kérdéses útvonalon halad, és eljut valamely csúcsba, akkor onnan, a feltevés szerint más útvonalon, ki is kell lépnie (utolsó lépésként belép a kezdőpontba). Így minden pontba (a kezdőpontba is) a sétálónak ugyanannyiszor kell belépni, mint kilépni. A feladat megoldhatóságához tehát szükséges, hogy minden pontban páros számú él találkozzon. Ez a Königsbergi hidak problémája esetében nem teljesül, ezért a feladat nem oldható meg.

A feladat megoldásában lényeges volt az egy csúcsban található élek száma. Ezt a számot a továbbiakban a csúcs *fokának* fogjuk nevezni.

Sokáig úgy látszott, hogy az ilyenfajta feladatok nem különösebben jelentősek. A XIX. század végétől azonban felismerték a gráfok elméleti vizsgálatának fontosságát tekintettel az eredmények sikeres alkalmazására számos gyakorlati feladat megoldásában. Itt érdemes megjegyezni, hogy az első igazán tudományos színvonalú gráfelméleti könyvet König Dénes (1884-1944) magyar matematikus írta 1936-ban. (Matematikatörténeti ABC)

Lássunk egy másik feladatot!

Igazoljuk, hogy egy hattagú társaságnak mindig van legalább három olyan tagja, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy (nem kizáró „vagy”) legalább három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást.

Szemléltessük a problémát gráffal!

Feleltessünk meg minden embernek egy-egy pontot. Két pontot kössünk össze éllel, ha a két ember ismeri egymást! A sok lehetséges esetből kettőt mutat be a 3. ábra.

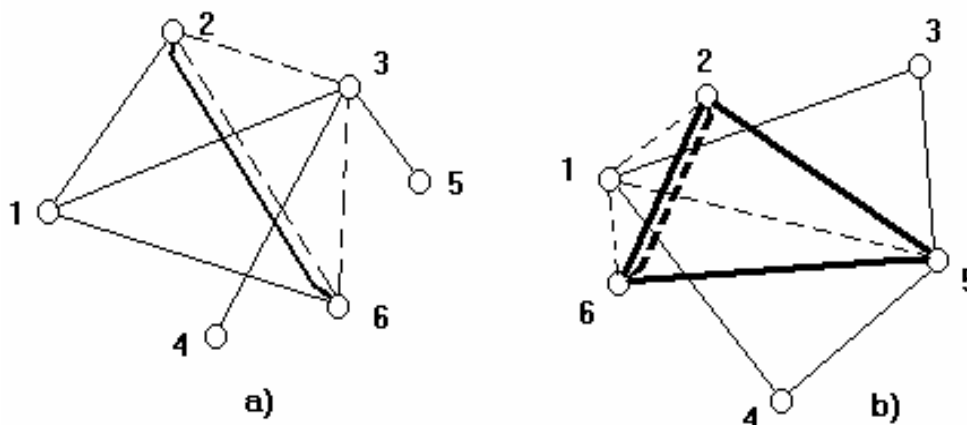
A jelképesen meghúzott szaggatott vonalak ugyanúgy, mint az egyes pontokat összekötő élek hiánya azt jelentik, hogy azok az emberek nem ismerik egymást. Amennyiben három ember kölcsönösen ismeri egymást, úgy találunk a gráfban háromszöget (ettől még lehet a társaságnak három olyan tagja is, akik kölcsönösen nem ismerik egymást). Ha nincs háromszög, nincs három olyan ember, akik kölcsönösen ismernék egymást (ekkor biztosan van legalább három, akik nem ismerik egymást).

Térjünk rá a bizonyításra!

Vegyük a gráf egy pontját, például az 1-et. Az 1-hez a további öt pontból

1) vagy található három olyan pont, melyhez 1-ből vezet él (pl. 2,3,6, az a) ábrán);

2) vagy van három olyan pont, mely 1-gyel nincs éllel összekötve (pl. 2,5,6 a b) ábrán).



3. ábra

Az 1) esetben, ha a három pont között van kettő, melyek éllel össze vannak kötve (pl. 2,6 – folytonos vonal, vagy lehetne összekötve 3,6 vagy 2,3), akkor megvan a háromszög, tehát a megfelelő emberek kölcsönösen ismerik egymást. Ha a három pont között (2,3,6) nincs kettő, melyek éllel össze vannak kötve, akkor e pontoknak megfelelő emberek nem ismerik egymást (2,3,6 – szaggatott vonal).

A 2) esetben ugyanígy okoskodunk. Ha a három pont között van kettő (pl. 2,6 - szaggatott vonal, vagy lehetne 5,6 vagy 2,5), melyek nincsenek éllel összekötve, akkor 1 és e két pont olyan embereknek felelnek meg, akik nem ismerik egymást (1,2,6 – szaggatott vonal). Amennyiben nincs a három pont között kettő olyan, hogy ne lennének összekötve, így össze vannak kötve (2,5,6 – vastag vonal), tehát ezek kölcsönösen ismerik egymást.

2. Néhány gráfelméleti jelölés

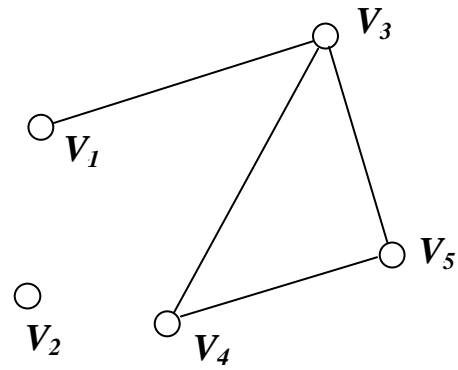
A következőkben néhány alapvető gráfelméleti fogalmat és jelölést foglalunk össze, melyekkel részben már az előző példákban is találkoztunk.

A G gráf pontjai halmazának szokásos jelölése: $V(G)$ (az angol *vertex* = csúcs szóból). Magukat a pontokat általában v, u, \dots , illetve az ABC más kis- vagy nagy betűivel, vagy akár egyszerűen számokkal jelöljük. A G gráf élei halmazának szokásos jelölése: $E(G)$ (az angol *edge* = él szóból). Például a 4. ábrán:

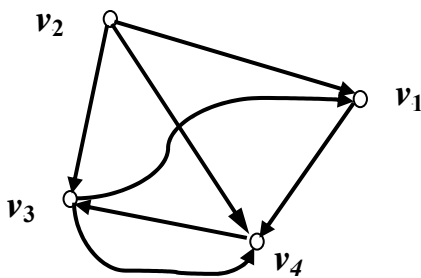
$$V(G) = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5\};$$

$$E(G) = \{(v_1, v_3); (v_3, v_4); (v_3, v_5); (v_4, v_5)\}.$$

Egy élt két végpontja megadásával jelölünk. Amennyiben a gráf *irányítatlan*, úgy a végpontok neveinek sorrendje lényegtelen. Az ún. *irányított* gráfok (5. ábra) esetében szerepe van az élek sorrendjének, ám itt azokat csak érintőleg tárgyaljuk. Az éleket rajzolhatjuk egyenes szakasznak, törött vonalnak, vagy görbe vonalnak is. Előfordulhat olyan él is, melynek mindkét



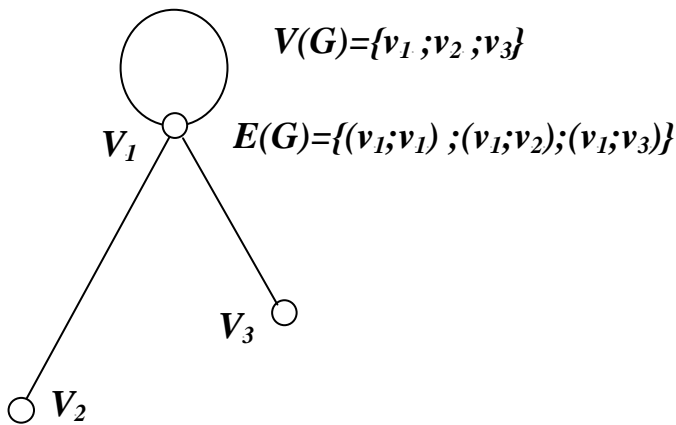
4. ábra



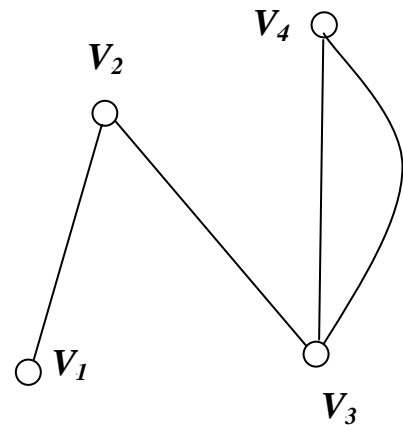
5. ábra

végpontja ugyanaz a pont. Az ilyen élt *huroknak* (vagy *hurokélnek*) nevezzük. Például a 6. ábrán a v_1 pontban.

Két csúcs között több él is húzhatunk, ezt többszörös élnek nevezzük. Ilyenek a 7. ábrán a v_3 -t és a v_4 -t összekötő élek. Figyeljünk arra, hogy gráfok ábrázolásánál két él az ábrán metszheti egymást, de ez a metszéspont a gráfnak nem csúcsa.



6. ábra



7. ábra

3. Szomszédsági (csúcs-) mátrix, élmátrix, súlymátrix

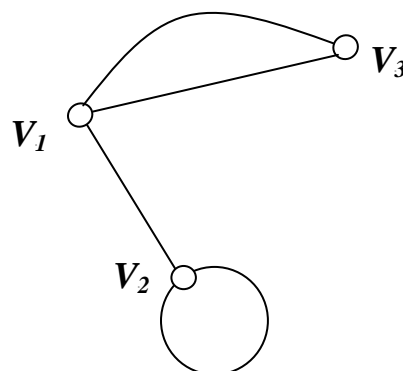
A G gráfhoz hozzá tudunk rendelni egy őt leíró mátrixot. A mátrixról tudni kell, hogy az általában egy $m \times n$ számú a_{ij} valós számot tartalmazó téglalap elrendezésű táblázat. Itt $i=1,2,\dots,m$ a mátrix sorainak száma, $j=1,2,\dots,n$ a mátrix oszlopainak száma. Ha a mátrixnak m sora és n

oszlopa van, $m \cdot n$ típusú mátrixnak nevezzük. A mátrixban levő a_{ij} számok a mátrix elemei. Az a_{ij} elem az i -edik sor j -edik oszlopának eleme. Ha $m=n$ a mátrixot négyzetesnek mondjuk.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nézzük meg a következő három csúcspontú gráfot (8. ábra). A gráfot ismerjük, ha meg tudjuk mondani, hogy melyik pont melyik ponttal van éllel összekötve és hányszoros éllel.

Készítsünk egy táblázatot! Írjuk be mindegyik mezőbe az azt meghatározó (nézd a sor- és oszlopcímet) csúcsokat összekötő élek számát. Jelen esetben:



8. ábra

	v_1	v_2	v_3
v_1	0	1	2
v_2	1	1	0
v_3	2	0	0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A példában szereplő gráf *szomszédsági* (csúcs-) mátrixának nevezzük az itt látható mátrixot. E mátrix ismeretében meg tudjuk rajzolni a gráfot.

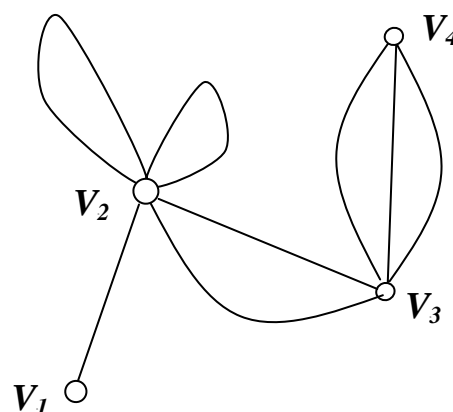
Általában egy n szögpontú gráf szomszédsági mátrixa az $A=(a_{ij})$ $n \cdot n$ -es mátrix, melyben a_{ij} a v_i és v_j csúcsokat összekötő élek száma, $i, j = 1; 2; \dots; n$. Így az A elemei nem negatív egész számok. A főátlóban levő elemek összege a gráfban levő hurkok számát adja. Világos az is, hogy az irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa szimmetrikus a főátlóra vonatkoztatva, vagyis $a_{ij} = a_{ji}$, míg az irányított gráf mátrixa nem szimmetrikus.

Így például, az 5. ábrán látható irányított gráf mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen most adott egy A mátrix. Adjunk meg egy gráfot, melynek ő a szomszédsági mátrixa!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



9. ábra

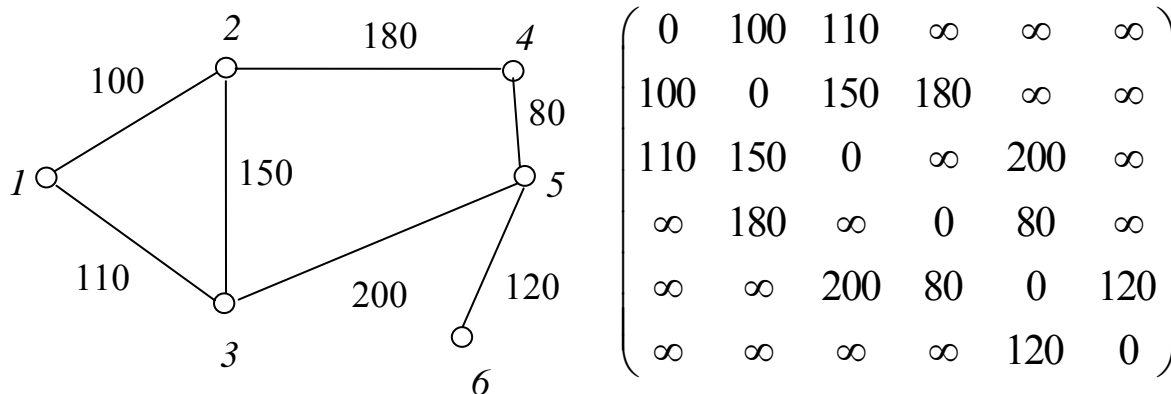
A gráf 4 szögpontú, lásd a 9. ábrát.

Ha egy gráf pontjait más sorrendben indexezzük, akkor a szomszédsági mátrixban bizonyos sorok és oszlopok felcserélődnek, míg a gráf ugyanaz marad.

Megjegyzés: A mátrix adatszerkezeti szempontból a programozási nyelvekben jól ismert kétdimenziós tömb.

A gráfok megadásának másik módja az *élmátrix*, mely a gráfok éleit tárolja, például egy $G[1..E]$ egydimenziós tömbben, ahol E az élek száma. Matematikai szempontból ez *sorvektor*, vagyis olyan mátrix, melynek csak egy sora van. A G elemei számpárok, pl. $G[k]=(v_i, v_j)$, vagyis a k – adik él a v_i és v_j csúcsokat köti össze. Itt nehezebb megállapítani két pont összekötöttségét, viszont könnyebb, pl. az összes élt felsorolni. Az élekhez lehet számot is rendelni ez a *súlyozott* gráf, mátrixa a *súlymátrix*. Ilyen, pl. egy csatornarendszer, ahol megadjuk az egyes csatornák átteresztő képességét, vagy egy úthálózat, ahol az élhez rendelt szám a csomópontok közötti táv.

Példaként ábrázoljuk egy városrész úthálózatát gráffal, melyben a szögpontok a buszmegállókat, az élek mellé írt számok pedig a megállók közötti távolságokat, vagy a haladási időket mutatják megfelelően választott egységekben. A gráfot és súlymátrixát a 10. ábra mutatja. A nem létező élek „súlyát” ∞ -nek vesszük.

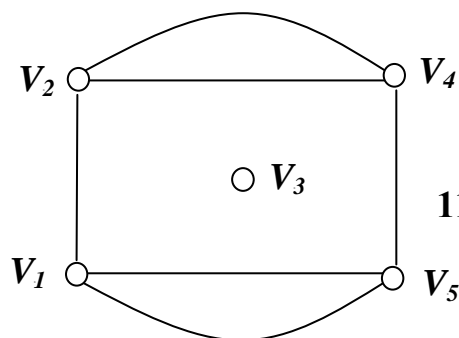


10. ábra

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Írjuk fel a 11. ábrán ábrázolt gráf szomszédsági mátrixát!
2. Az adott mátrixhoz adjunk meg egy gráfot!

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 1 \\
 1 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$



11. ábra

4. A fokok és az élek száma közötti összefüggés

A gráf egy csúcsában (pontjában) található élek számát, mint azt már említettük, a csúcs *fokának* nevezzük. Ez egy nem negatív egész szám, mely részesetben lehet 0 is. Az utóbbi esetben a pont izolált pont, nincs összekötve egyetlen más ponttal sem. A hurokél kettőnek számít!

A gráfelmélet alapfogalmaival először ismerkedők előtt gyakran felmerül a kérdés, van-e összefüggés a gráf fokszáma és éleinek száma között? A válasz nagyon egyszerűen eldönthető. Mivel minden él két ponthoz - vagy hurok esetében ugyanazon ponthoz kétszer - csatlakozik, így a fokok összege az élek számának kétszerese.

Lássunk egy idevágó egyszerű példát!

A röplabdabajnokságban szereplő csapatok néhány mérkőzést már lejátszottak. Ábrázoljuk a jelenséget gráffal: a csapatoknak feleltessünk meg pontokat, és két pontot kössünk össze éllel, ha a megfelelő két csapat már mérkőzött egymással. Ekkor egy csapat annyi mérkőzést játszott, amennyi a neki megfelelő pont foka. Ha mindegyik csapatról tudjuk, hogy hány mérkőzést vívott, vagyis ismerjük a nekik megfelelő pontok fokszámát, akkor meg tudjuk mondani, hogy eddig összesen hány mérkőzés volt, más szóval, hány éle van a gráfnak? Mivel minden mérkőzésen két csapat vesz részt, a mérkőzések száma az egyes csapatok mérkőzésszáma összegének fele.

A gráf fokainak összege tehát páros szám, amiből következik, hogy a páratlanfokú pontok száma páros.

A példára vonatkozó további egyszerű következtetés, hogy a bajnokság során bármikor páros számú olyan csapat van, melyek páratlan számú mérkőzést játszottak.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Egy társaságban néhányan kezet fogtak egymással. Mutassuk meg, hogy azoknak a száma, akik páratlan számú emberrel fogtak kezet, páros!

2. Rajzoljunk olyan négypontú gráfokat, melyekben minden pont másodfokú!

3. Van-e olyan négypontú gráf, melynek egy első és egy harmadfokú pontja van? (A többi pont más fokszámú.)

4. Van-e olyan többszörös éleket nem tartalmazó **G** gráf, melyben minden pont foka különböző?

5. Rajzoljunk négypontú harmadfokú pontot tartalmazó gráfokat!

6. Mutassuk meg, hogy a **G** gráf szomszédsági mátrixának bármely sorában levő elemek összege a megfelelő pont fokszáma!

5. Egyszerű gráfok

Az általános gráfban két pont többszörösen is össze lehet kötve, illetve a hurokél (egy pontból saját magába vezető él) is megengedett. A továbbiakban csak olyan gráfokról lesz szó, melyekben nincs sem többszörös él, sem hurok. Az ilyen gráfokat egyszerű gráfoknak nevezzük.

Az egyszerű gráfok szomszédsági mátrixában csupa 0 és 1 áll, és a főátló minden eleme 0.

A bevezetés második példájában a hattagú társaság tagjait pontokkal jelöltük, az ismerősöket pedig éllel kötöttük össze. Így egy egyszerű gráfot kaptunk. A feladat bizonyításának könnyebb megértése érdekében a 3. ábrán egyes „nem ismerősök”-et szaggatott vonallal kötöttünk össze. Így valójában azt kellett bizonyítanunk, hogy egy hatpontú gráfban feltétlenül lesz legalább egy folytonos háromszög vagy legalább egy „szaggatott” háromszög.

Természetes így az az ötlet, hogy egy adott gráfhoz rendeljünk egy másik gráfot úgy, hogy a pontok halmaza mindkét gráfban ugyanaz, de a második gráfban két pontot akkor és csak akkor kötünk össze, ha az első gráfban a két pont nem volt összekötve.

Ezt az új gráfot az eredeti G gráf *komplementer* gráfiájának nevezzük és \bar{G} -sal jelöljük.

Ezután az előbbi példa megfogalmazható így is: Adott egy hatszögpontú G gráf. Mutassuk meg, vagy G , vagy \bar{G} tartalmaz háromszöget.

Vizsgáljuk most meg egy egyszerű gráf pontjainak fokszámát! Csak az az eset érdekes, ha a gráfnak legalább két pontja van. Ha a gráf n -pontú, akkor mindegyik pont fokszáma $0; 1; 2; \dots; n-1$ lehet. Ha egy pont fokszáma 0 , akkor az a pont nincs más ponttal összekötve, ha pedig egy pont fokszáma $n-1$, akkor ez a pont minden más ponttal össze van kötve. Ezért nem fordulhat elő, a gráfban 0 -fokú és $(n-1)$ -fokú pont is legyen. A kettő közül legfeljebb egyik lehet. Így azt kapjuk, hogy mivel n pontunk van, de a fokszámra csak $n-1$ különböző eset lehetséges, ezért legalább egy fokszámra legalább kétszer kell előfordulnia. Összefoglalva:

Ha egy gráfnak van legalább két pontja, akkor van két azonos fokú pontja.

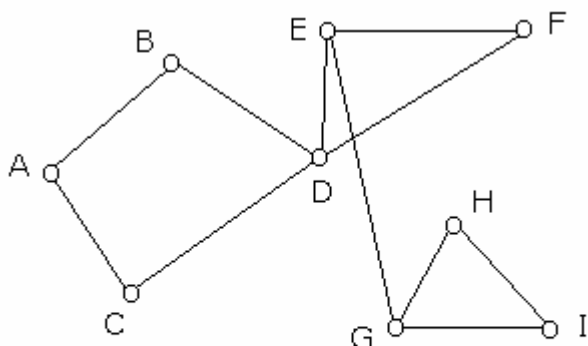
GYAKORLÓ FELADATOK

1. Rajzoljunk hat szögpontú G gráfokat, és rajzoljuk meg mindegyik \bar{G} komplementerét is! Keressünk háromszöget G -ben, illetve \bar{G} -ben.

2. Vizsgáljuk meg, hogy egy G gráf szomszédsági mátrixa milyen viszonyban van a komplementer gráf szomszédsági mátrixával.

6. Út, vonal, séta, kör

Ismerkedjünk meg további gráfelméleti alapfogalmakkal. Jelöljük most a szemléltető gráf csúcspontjait a latin ábécé nagybetűivel (12. ábra). Ábrázolja ez a gráf egy városrész úthálózatát.



12. ábra

A gráfelméletben *útnak* nevezzük az éleknek olyan egymáshoz csatlakozó sorozatát, mely egyetlen szögpontra sem halad át egynél többször. Ez természetesen azt is jelenti, hogy minden élen legfeljebb egyszer haladunk át. Például $ABDEGH$ út, de az $ABDEFDEGIH$ nem út.

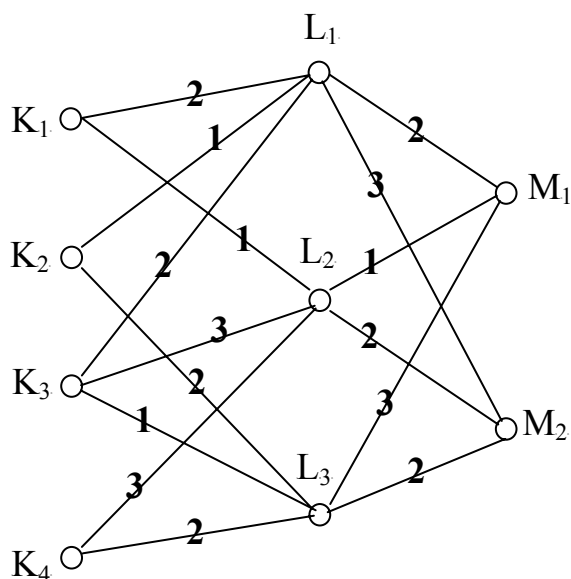
Vonalnak nevezzük a gráf éleinek olyan egymáshoz csatlakozó sorozatát, melyben minden él különböző, ám egyes pontokon többször is áthaladhatunk. Például AB, BD, DE, EF, FD, DC vonal, de nem út. Vonalról van szó, ha egy részgráfot a ceruza felemelése nélkül, minden élt csak egyszer érintve meg tudunk rajzolni.

Még általánosabb fogalom a *séta*. Sétának nevezzük gráfban az AB, BD, \dots egymáshoz csatlakozó élek sorozatát, ahol az élek és pontok nem feltétlenül különböznek. *Ha két pont között van séta, akkor biztos, hogy út is van.*

Az AB, BD, DC, CA élsorozat a kiindulási pontba visszatérő vonal, melyben minden él és pont, a kezdő és végponttól eltekintve, egyszer szerepel. Az ilyen élsorozatot *körnek* nevezzük. Ha egyik pontból a másikba két út is vezet, akkor a gráfban biztosan van kör.

Konkrét feladatokban legtöbbször utakat keresünk, mert azok száma véges, és általában rövid úton szeretnénk egyik pontból a másikba jutni.

Legyen A a gráf szomszédsági mátrixa, akkor a $K(k) = A^k$, azaz az A mátrix k -tadik hatványaként kapott mátrix $K(k)_{ij}$ (ij indexű) eleme, a gráf i pontjából a j pontjába vezető k hosszúságú séták számát adja. Itt a séta hosszán az i ponttól a j csúcspontig történő haladás közben bejárt élek számát kell érteni. Valóban, maga a szomszédsági mátrix is ezt mutatja: mely szögpontra melyik szögpontra lehet egyetlen élen haladva eljutni. Nyilvánvalóan abba a szögpontra, amellyel közvetlenül össze van kötve éllel. Nehezebb átlátni a mátrix önmagával való többszöri beszorzása eredményeként kapott mátrix elemeinek értelmét. A mátrixok szorzása



13. ábra

megértésének egyszerűsítése céljából lássunk egy könnyen érthető példát, s az általánosítás érdekében tekintsünk el a mátrixok négyzetes voltától.

Példa. Legyen K, L, M három ország, melyek egyes városai között vonat-összeköttetés van. Legyenek K országban K₁, K₂, K₃, K₄; L országban L₁, L₂, L₃ és M országban M₁ és M₂ városok. Az egyes városok között közlekedő vonatok számát írjuk rá a városokat jelző pontokat összekötő szakaszokra megfelelően. (13. ábra). Bár az ábra is eléggé áttekinthető, mátrixok segítségével is ábrázolhatjuk

az utazási lehetőségeket. Lássuk először a K-ból L-be közlekedő vonatokat (ha K_i és L_j között nem közlekedik vonat, akkor 0-t írunk a megfelelő helyre). Ábrázoljuk táblázattal és A-val jelölve mátrixként:

	L ₁	L ₂	L ₃
K ₁	2	1	0
K ₂	1	0	2
K ₃	2	3	1
K ₄	0	3	2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A mátrix i-edik sorának j-edik eleme azt mutatja, K_i-ből hány vonat megy L_j-be.

Tekintsük most az L-ből M-be menő vonatokat. A megfelelő mátrixot jelöljük most B-vel:

	M ₁	M ₂
L ₁	2	3
L ₂	1	2
L ₃	3	2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ebben a mátrixban az i-edik sor j-edik eleme azt mutatja, hogy L_i városból hány vonat megy M_j városba.

Ábránk szerint K országból M országba csak valamelyik L-beli városon át juthatunk el. Most azt kérdezzük, hogy hány különböző módon juthatunk el K_1 -ből M_1 -be.

Tekintsünk az ábrára, ebből a választ le tudjuk olvasni. Ha K_1 -ből L_1 -be megyünk, az kétféleképpen lehetséges, innen ugyancsak kétféleképpen utazhatunk M_1 -be. Ez tehát $2 \cdot 2$ lehetőség.

K_1 -ből L_2 -be egy vonatjárat van, L_2 -ből M_1 -be ugyancsak egy. Így ezen az úton csak $1 \cdot 1$ módon juthatunk M_1 -be.

K_1 -ből nem vezet vonat L_3 -ba, így K_1 -ből L_3 -an át M_1 -be jutni 0 lehetőség. (Írhatnánk $0 \cdot 3$ -at is, mert L_3 -ból három lehetőség van M_1 -be jutni.)

Összesen tehát $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 5$ különböző lehetőségünk van arra, hogy K_1 -ből M_1 -be utazzunk.

	M_1	M_2
K_1	c_{11}	c_{12}
K_2	c_{21}	c_{22}
K_3	c_{31}	c_{32}
K_4	c_{41}	c_{42}

A feladatot általánosabban megfogalmazva: határozzuk meg az itt látható táblázat elemeit, ahol c_{ij} az a szám, amely azt mutatja, hogy K_i -ből hány különböző módon juthatunk el M_j -be.

Tudjuk, hogy $c_{11}=5$. Határozzuk meg például a c_{22} -t!

Írjuk egymás mellé az A, B és a C mátrixokat!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

Már ismerjük a c_{11} meghatározásának módját:

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 5 = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31},$$

és a feladat alapján hasonló módon számítjuk ki a c_{22} -t:

$$c_{22} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 7, \text{ vagyis}$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}.$$

Ha az A és B mátrixokat figyelmesen megnézzük, azt vesszük észre, c_{11} -et úgy kapjuk, hogy az A mátrix első sorának elemeit a B mátrix első oszlopának megfelelő elemeivel megszorozzuk, és a kapott három kéttényezős szorzatot összeadjuk. Ugyanezt látjuk a c_{22} esetén is.

Két mátrixból ily módon előállított új mátrixot az előbbiek szorzatának nevezzük. Mellőzve a mátrixok szorzatának más tartalmi vonatkozásait (más értelmezését) definiáljuk két mátrix szorzatát:

Az A $m \times n$ típusú és a B $n \times p$ típusú mátrix $A \cdot B$ szorzatán azt a C $m \times p$ típusú mátrixot értjük, melyben

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p.$$

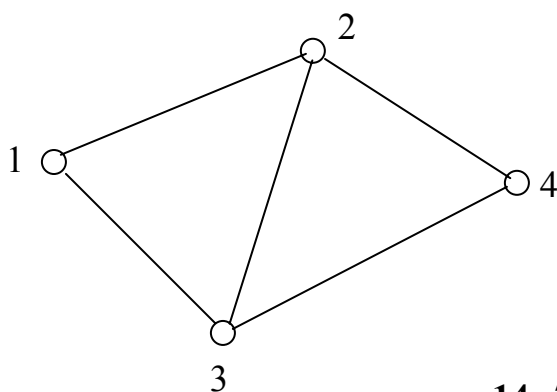
Mint látjuk, a szorzás definíciója nem bármely két mátrixra vonatkozik, hanem csak olyanokra, ahol az első tényezőnek annyi oszlopa van, ahány sora a másodiknak. A példában szereplő A és B mátrixok szorzata az itt látható mátrix:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 7 \\ 10 & 14 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

A mátrixok szorzásának fontos tulajdonsága, hogy *nem kommutatív*, vagyis $A \cdot B \neq B \cdot A$, ugyanakkor *asszociatív*, tehát $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. A gráfokat leíró szomszédsági mátrixok hatványozása szempontjából ez fontos.

Könnyen belátható, hogy a négyzetes (mert azok!) szomszédsági mátrixok hatványozása önmagával történő többszöri beszorzással egyszerűen megoldható.

Legyen adva egy négyponos egyszerű gráf, melynek szomszédsági mátrixa A . Jelöljük csúcspontjait rendre arab számokkal. Így ezek azonosíthatók a gráf mátrixának sor- és oszlopszámaival (14. ábra).



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. ábra

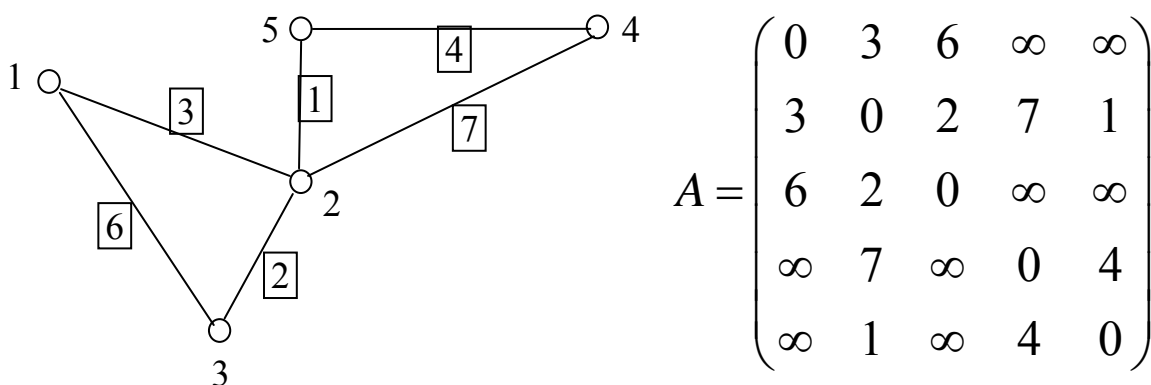
Számoljuk ki a $K(2)=A^2$ és a $K(3)=A^3$ mátrixokat:

$$K(2) = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad K(3) = A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ezen mátrixok elemei a sor és oszlopszámoknak megfelelő szögpontok között való közlekedés közben két, illetve három élen történő áthaladások számát adják. A kapott mátrixok ugyan úgy, mint az irányítatlan gráfok szomszédsági (csúcs-) mátrixai, szimmetrikusak a főátlóra vonatkoztatva. Egyszerű próbálkozással könnyű észrevenni, itt nem a bejárható utak számát, hanem a séták számát kaptuk meg. Amennyiben az i -edik pontból a j -edikbe vezető $k=1,2,\dots,n-1$ (egy n szögpontú gráfban nem lehet hosszabb) lépéses utak számát szeretnénk tudni, rögzíteni kell a séta közben érintett pontokat, s csak azokat tartani meg, melyekben minden érintett szögpont csak egyszer fordul elő.

Informatikai vetélkedők feladatai között gyakran találkozunk olyan feladatokkal, melyek a legrövidebb utak meghatározását tűzik ki célul bizonyos csomópontok között. Ábrázoljuk a csomópontokat és az őket összekötő utakat súlyozott gráffal, ahol az élekhez számok vannak rendelve. A konkrét feladattól függően a gráf lehet irányítatlan vagy akár irányított. Többféle algoritmus létezik a probléma megoldására (Warshall algoritmus, Dijkstra algoritmus, stb.). Példaként ismerkedjünk meg a Warshall algoritmussal.

Legyen adott egy egyszerű öt szögpontú súlyozott gráf (15. ábra).



15. ábra

Szomszédsági mátrixát jelöljük A -val. Számítógépes megoldás esetén a ∞ jelek helyére írjunk megfelelően nagy számokat (pl. $1e+10$). A végtelenek az él nélküli pontpárokat jelölik.

Vezessünk be egy új mátrix műveletet:

$$A[k]_{ij} = \min\{A[k-1]_{ij}, A[k-1]_{ik} + A[k-1]_{kj}\}, \dots\dots(*)$$

ahol a $A[k]$ a mátrixok sorozata $k=1..n$ -ig számítandó, ahol n az A mátrix mérete ($n*n$), és $A[0] = A$. Vagyis a súlymátrixból kiindulva ($k=0$) rendre előállítjuk az $A[1], A[2], \dots, A[n]$ mátrixokat a (*)-al jelölt képlet szerint: az új – magasabb sorszámú mátrix – (ij) indexű elem értékeül az előző mátrix (ij) -edik eleme, valamint az (ik) és (kj) indexű elemek összegének összevetése után a kisebbiket vesszük.

Az $A[n]$ -re kapott eredmény-mátrix a legrövidebb utakat adja!

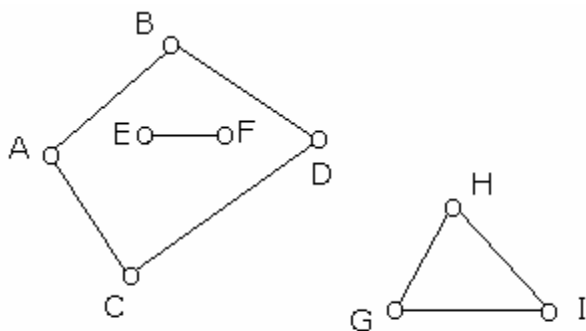
Esetünkben $n=5$. A súlymátrix alapján az ötödik menetben $k=5$ -re a következő mátrixot kapjuk:

$$A[5] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 7 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez a keresett útmátrix. A harmadik sor negyedik oszlopának eleme $a[5]_{34}=7$ például azt jelenti, hogy a gráf 3-as szögpontjából a 4-esbe vezető legrövidebb út hossza 7 egységnyi (3-2-5-4 pontokon át).

7. Összefüggő gráfok

Egy gráfot *összefüggőnek* mondunk, ha bármely pontjából bármely másik pontjába eljuthatunk úton (elég azt megállapítani, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott pontjából az összes többihez van-e út). Az eddig vizsgált gráfok mind összefüggők voltak, míg a 16. ábrán a gráf nem összefüggő.



16. ábra

Ha egy gráf nem összefüggő, akkor van olyan pontja, melyből nem vezet út minden másik pontba. Azt látjuk, hogy a gráf darabokra esik szét. A gráf egy

darabja az összes olyan pontok (és az őket összekötő élek) halmaza, melyek kölcsönösen elérhetők úton. Ezt a gráf egy *összefüggő komponensének* nevezzük.

A gráfelméletben általában elegendő az összefüggő gráfokat vizsgálni, hiszen a komponensek külön-külön tanulmányozhatók.

Vizsgáljuk meg az összefüggő gráffal kapcsolatban a következő problémát!

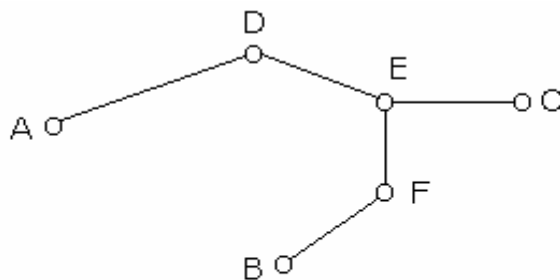
Ha egy gráf A pontjából eljuthatunk úton a B pontba és a B -ből is eljuthatunk úton a C -be, vajon eljuthatunk-e A -ból a C -be ugyancsak úton? Nézzük a 17. ábrát!

Ha elmegyünk A -ból a B -be és B -ből a C -be, akkor ugyan eljutunk A -ból C -be, de nem biztos, hogy úton.

A -ból B -be a következő úton megyünk: AD, DE, EF, FB .

B -ből C -be menjünk a következő úton: BF, FE, EC .

Az $AD, DE, EF, FB, BF, FE, EC$ nem út, hanem séta. Ugyanakkor van megoldás a problémára: ha A -ból B -be és B -ből C -be vezet út, akkor vezet út A -ból C -be is. Valóban az A -ból B -be vezető úton menjünk el addig, míg az először metszi a B -ből C -be vezető utat (ez esetleg maga az A pont is lehet). E ponttól a B -ből C -be vezető úton haladjunk C -ig. Így jutunk el C -be, és sem él, sem út nem ismétlődhetett.



17. ábra

Hasonlóan látható be, hogy ha A és C között vezet séta, akkor vezet út is.

Tegyük fel, hogy A és B között vezet séta. Ha nincs a sétának olyan pontja, melybe kétszer érkezünk, akkor ez a séta - út. Ha van olyan pont, melybe kétszer (többször) érkezünk, akkor a két odaérkezés közötti sétát elhagyva rövidítettük a sétát. Ezt mindaddig megtehetjük, míg van olyan csúcs, melybe kétszer érkezünk. Így véges sok rövidítés után olyan

sétához jutunk, melyben már nincs olyan pont, melybe kétszer jutunk, így utat kapunk.

GYAKORLÓ FELADAT

Adott egy összefüggő gráf, melyben van egy kör. Mutassuk meg, hogy ennek a körnek bármely élét elhagyva, a gráf összefüggő marad!

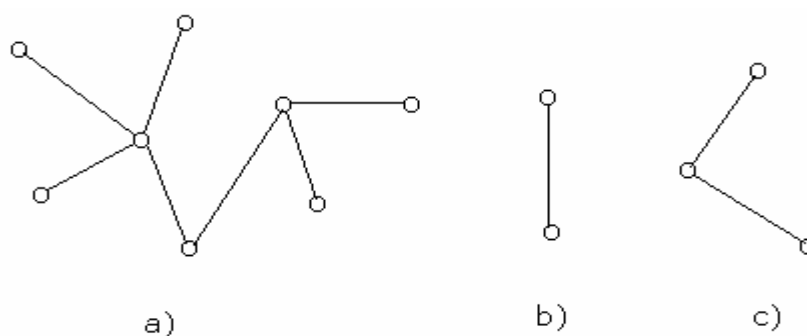
8. Fák, erdők

Jelképezzék egy gráf pontjai valamely város középületeit, élei pedig az azokat összekötő utakat. Természetes követelmény, hogy ez a gráf összefüggő legyen, azaz minden pontból minden másik pontba úton el lehessen jutni. A városban takarékos emberek laknak, ezért a lehető legkevesebb utcát építették meg, azaz a legkevesebb éllel rendelkező olyan gráfot, mely még összefüggő.

Ebben a gráfban nem lehet kör (lásd az előző paragrafus feladatát). Így az úthálózat egy összefüggő körmentes gráf.

Az összefüggő, körmentes egyszerű gráfokat *fának* nevezzük. Fa látható a 18.a) ábrán; kétcsúcsú fa a 18.b) ábrán; háromcsúcsú a 18.c) ábrán.

Az olyan nem összefüggő gráfot, melynek összefüggő komponensei fák, *erdőnek* nevezzük.



18. ábra

Érdemes felsorolnunk a fák néhány jellegzetes tulajdonságát.

Fában két pont között pontosan egy út létezik. Létezik, mert a gráf összefüggő, és pontosan egy, mert ha kettő lenne, kör is lenne.

Ha fához hozzáteszünk egy élt, már nem lehet fa. Az (i, j) él hozzávételével ugyanis kört kapnánk, hiszen eddig is volt a két csúcs között út, és most lett még egy, tehát kör keletkezett.

Fából egy élt elhagyva már nem lehet fa. Ha ugyanis fa lenne, akkor abba az iménti élt visszatéve megint csak fát kapnánk (az eredetit), ami az előző bekezdés szerint nem lehet.

Úgy is fogalmazhatnánk, hogy adott számú szögpontú fa a lehető legkevesebb élt tartalmazza, ami szükséges az összefüggőséghez.

A 18. ábrán látható fák mindegyikében van elsőfokú pont. Vajon minden esetben így van ez? Válasszuk a fa egy tetszőleges pontját, nevezzük A -nak (ez lehet elsőfokú vagy akármilyen más), és induljunk el valamely irányba (a ponthoz illeszkedő valamely élen – legalább egy ilyen él van, merthogy a gráf összefüggő). Mivel nincs kör, így soha nem térhetünk vissza olyan pontba, ahol egyszer már jártunk ezért a gráf vége miatt az útnak egyszer vége lesz. Nem tudunk tovább menni, azaz ez a pont elsőfokú. Legyen ez a B pont. Most ebből a B elsőfokú pontból indulva, ugyanilyen módon, ismét lesz vége a körmentes gráfnak, kapunk egy újabb elsőfokú pontot, amely lehet az A (ha elsőfokú volt), vagy valamely más, például a C . Ebből következik:

Egynél többpontú fában van legalább két elsőfokú pont.

Lássuk most az alapkérdést. Meg tudjuk-e mondani, hogy egy n -pontú fának, hány éle van?

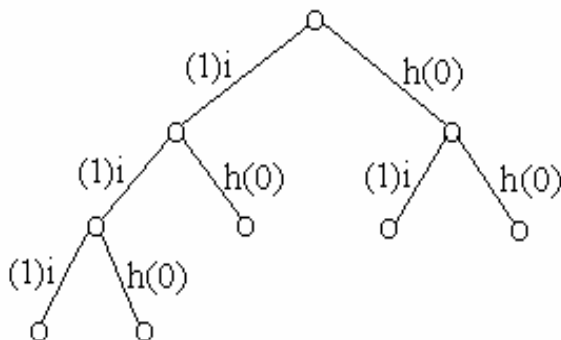
A 18. ábrán látható esetekben:

a 8-pontúnak 7 éle van;

a 2-pontúnak 1 éle van;

a 3-pontúnak 2 éle van.

Igazoljuk, hogy általában: n -pontú fának $n-1$ éle van.



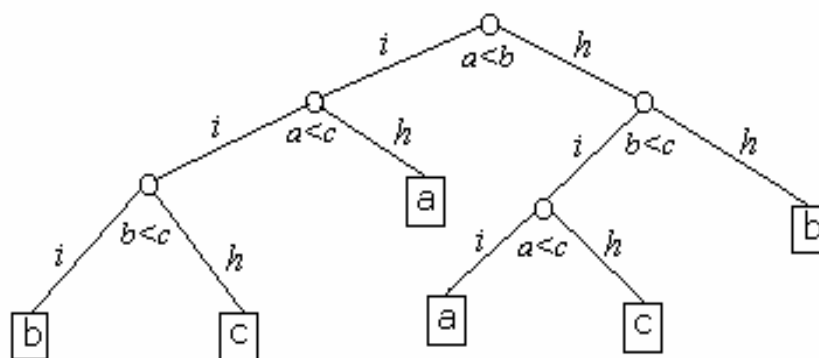
19. ábra

Ez könnyen bizonyítható teljes indukcióval.

$n=1$ -re igaz az állítás – az 1-pontú fának 0 éle van. Tegyük fel, hogy igaz k -pontú fára, és igazoljuk, hogy akkor igaz $k+1$ -pontúra is. Növeljük a k -pontú fát egy ággal. Mivel a fa körmentes, összefüggő, egyszerű gráf, így a fa bármely választott pontjából csak egy új, eddig nem létező pontba húzhatunk egy élt. Eggyel nőtt a fa pontjainak száma, és eggyel nőtt az élek száma is, így az állítás igaz.

A fák alkalmasak arra, hogy számrendszereket szemléltessenek

Különösen nagy szerepük van az úgynevezett bináris fáknek, melyek a kettes számrendszert szemléltetik. Itt egy pont egy kérdést jelent, melyre igaz vagy hamis a válasz, és e szerint megyünk tovább a bal vagy a jobb oldali élen (19. ábra).



20. ábra

Példaként ábrázoljuk bináris fával azt az algoritmust, mely három szám közül kiválasztja a középsőt! Itt a kérdés a fa csúcsponja mellett feltüntetett számpárok viszonyának igaz vagy hamis volta (20. ábra). A fa valamely téglalappal jelzett elsőfokú pontja tartalmazza a választ (a konkrét számadatoktól függően).

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Rajzoljunk olyan 5 csúcspontú gráfokat, melyeknek 2 harmadfokú és 3 negyedfokú pontja van. Hány éle van a rajzolt gráfoknak? Sorszámozzátok meg a csúcsaikat, és adjátok meg csúcs-(szomszédsági-) valamint élmátrixaikat!

2. Hány olyan 5 csúcspontú gráf van, ahol a csúcsok fokai rendre: 1,2,2,3,3?

3. Egy sakkversenyen bármely játékos játszik bármely másik játékosal. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely szakaszában van két olyan versenyző, akik addig azonos számú játszmát játszottak!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráf csúcsainak száma $n \geq 2$ és éleinek száma n -nél kevesebb, akkor van elsőfokú csúcsa is!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha n számú telefonközpont közül bármely kettő között létesíthető összeköttetés, akkor van legalább $n-1$ számú közvetlen összeköttetés is!

6. Egy sakkbajnokságra n csapat nevezett be, s eddig $n+2$ mérkőzést játszottak le. Mutassuk meg, hogy van közöttük legalább egy csapat, mely legalább 3 mérkőzést már lejátszott.

7. Igazoljuk, hogy a G összefüggő egyszerű gráf akkor és csak akkor marad összefüggő egy élének törlése után, ha van a G -nek olyan köre, mely tartalmazza ezt az élt.

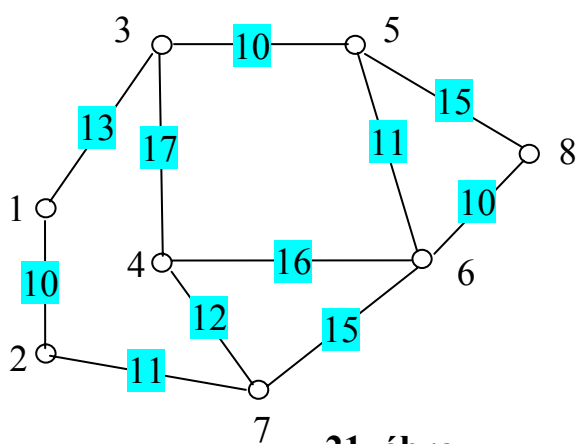
8. 1-től N -ig ($N < 100$) sorszámozott metróállomást $K < 100$ -nál számú alagút köt össze. A metróállomások telefonvonalakkal való összeköttetése céljából ki kell jelölni a telefonközpont helyét, ahonnan, majd kábeleket fektetnek valamennyi állomásig. Határozzuk meg a központ helyét, ha azt akarjuk, hogy a legtávolabbi állomásig húzódó kábel hossza a lehető legrövidebb legyen.

Adatok: N, K , valamint $S[i, j]$ az $[i]$ és $[j]$ állomásokat összekötő alagút hossza.

9. Adott a város valamennyi autóbusz-járatának menetrendje. Lehetőség van közlekedni átszállással is. Határozzuk meg: az A megállótól a B buszmegállóig tartó utazás időtartamát úgy, hogy ez az idő minimális legyen.

Kiegészítő olvasmány

A fejezet 5. pontjában megismerkedtünk a Warshall algoritmussal, mely lehetővé teszi a legrövidebb távolság meghatározását adott gráf szögpontjai között. A feladat fontosságára való tekintettel tekintsük át most röviden a klasszikusnak számító Ford algoritmust (bizonyítás nélkül, példával illusztrálva). Ennek lényege a következő egyszerű tény: amennyiben ismert két szögpont között vezető legrövidebb út, úgy ezen út bármely két pontja között vezető út, mint az előbbi út része, szintén a legrövidebb lesz.



21. ábra

A Ford algoritmus segítségével meghatározható a gráf egy tetszőlegesen választott pontjából az összes többi szögpontra vezető legrövidebb út hossza.

Nézzük lépésről lépésre a végrehajtást:

1. lépés. Sorszámozzuk az n szögpontú gráf szögpontjait rendre: 1, 2, 3, ..., n . 1-el jelöljük azt a pontot,

amelyiktől a többi pontba vezető legrövidebb utakat kívánjuk meghatározni. Hozzuk létre a gráf súlymátrixát. Mintapéldánkban ábrázoljuk most azt

	10	13					
10						11	
13			17	10			
		17			16	12	
		10			11		15
			16	11		15	10
	11		12		15		
				15	10		

a. tábla

táblázattal (a. tábla). Ha két pont között nincs összeköttetés, a megfelelő cellát hagyjuk üresen. Vegyük észre, hogy az adott táblázattal ábrázolt mátrix szimmetrikus a főátlóra vonatkoztatva, vagyis a gráf irányítatlan.

2. lépés. A táblázat első sora elé, és első oszlopa fölé is, írjunk 0-t. Most nézzük végig balról jobbra a bejelölt sort, és amint számot tartalmazó cellát találunk, adjuk ezt a számot a sorjelző számhoz, és írjuk az összeget azon oszlop fölé, melynek cellájában a számot találtuk. Ezután tükrözzük az oszlopok fölé írt számokat a tábla főátlójára vonatkoztatva. Ekkor újabb sorok kapnak jelzőszámot. Valamennyi újonnan jelzőszámmal bejelölt sorral hajtsuk végre a 0 jelzésű sorral az imént végzett műveletet. Tartsuk be a következő szabályt: *amelyik oszlop fölött már van szám, azt ne változtassuk*. Minden alkalommal, amikor új oszlopjelző számot írtunk be, tükrözzük azt a főátlóra vonatkoztatva. A műveletsor akkor ér véget, ha már minden sor jelzőszámot kapott.

A mintapélda-táblázatnak ezt az állapotát a b. tábla mutatja.

	0	10	13	30	23	46	21	38
0		10	13					
10	10						11	
13	13			17	10			
30			17			16	12	
23			10			11		15
46				16	11		15	10
21		11		12		15		
38					15	10		

b. tábla

3. lépés. Eredeti sorszámuk (1, 2, 3, ...) növekvő sorrendjében nézzük végig a táblázat sorait balról jobbra, s amint a sor valamely cellájában számot találunk, adjuk azt hozzá a sorjelző számhoz, és hasonlítsuk össze a kapott összeget a cella oszlopa fölött található jelzőszámmal. Amennyiben az összeg kisebb, mint az oszlopjelző szám, úgy az oszlopjelző számot lecseréljük az összegre. Ha az összeg nem kisebb az oszlopjelző számnál, úgy csere nem történik.

Valamennyi sorral végezve, az új oszlopjelző számokat tükrözzük a tábla főátlójára vonatkoztatva. A lépés műveleteit mindaddig ismételjük, amíg a sorok végignézésekor már nem változnak az oszlopjelző számok. A c. táblán már feltüntettük (a tábla bal szélén és felső sorában) a kapott új sorjelző és oszlopjelző számokat.

		0	10	13	30	23	34	21	38
		0	10	13	30	23	46	21	38
0	0		10	13					
10	10	10						11	
13	13	13			17	10			
30	30			17			16	12	
23	23			10			11		15
34	46				16	11		15	10
21	21		11		12		15		
38	38					15	10		

c. tábla

4. lépés. Az új oszlopjelzők alapján megkaphatjuk az 1-es pont és a többi pont között vezető legrövidebb utat. Válasszunk egy tetszőleges k sorszámú szögpontot. 1) Az 1-esből a k -adik pontba vezető legrövidebb út hossza a k -adik oszlop új oszlopjelző száma. 2) Az utolsóelőtti (k -adik) pontot ezen az úton a következőképpen találjuk meg: a k -adik oszlopban megkeressük azt a számot, mely a sorjelző számával összeadva az új oszlopjelző számot adja. Legyen ez a szám az l -edik sorszámú sorban. Akkor az 1-es pontból a k -adikba pontba vezető úton az utolsóelőtti pont az l -edik. Az l -edik előtti pontot úgy kapjuk, hogy az l -ediket tekintjük utolsóznak. A mintapéldában legyen $k=6$. Akkor az 1-esből a 6. pontba vezető legrövidebb út hossza 34. Az utolsóelőtti pont pedig $l=5$ (mivel $23+11=34$, a 11-es pedig az 5. sorban van).

RÖVIDÍTÉSEK

Rövidítés	MAGYARÁZAT
4GL	Negyedik generációs programozási nyelv
A/D	Analog/Digital
AAC	Advanced Audio Coding: MPEG-4 szabványon alapuló audió tömörítő eljárás
ActiveX	A Microsoft interaktív technológiáinak gyűjteménye, olyan utasításkészlet, amely objektumok használatát vezérli
ADSI	Active Directory Services Interface: Microsoft Windows hálózati rendszerben hierarchikus címtárszolgáltatás csatolója az NDS, LDAP (lásd ott) felé
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line: Nagysebességű digitális adatátviteli technológia hagyományos vagy ISDN telefonvonalon, 384-1500 kbit/s letöltési és 64-384 kbit/s feltöltési sebességgel
AGP	Accelerated Graphics Port: A legújabb szabványos csatlakozófelület az alaplapra helyezhető kártyák számára. Általában grafikai kártyákat helyeznek el benne. Sebessége 0.512 - 1.1 GB/s.
Algol	Algorithmic Language - A 60-as években elterjedt algoritmikus nyelv
ALU	Aritmetic Logic Unit: Aritmetikai logikai egység. A számítógép központi egységének része, amely aritmetikai és logikai műveleteket és velük kapcsolatos más műveleteket hajt végre. Rendszerint fixpontos bináris összeadóból, komplementálóból, léptető regiszterből és logikai műveleteket végző részből áll
ANSI	American National Standards Institute: Mai elnevezése az 1918-ban ASA (American Standard Association), majd USASI (United States of America Standard Institute) néven alapított szabványügyi szervezetnek. Alapvető feladata az USA ipari szabványainak kidolgozása. Az USA képviselője az ISO-ban
API	Application Programming Interface: Alkalmazói program interfész. Szabványos programkörnyezet, melyet az operációs rendszer is használ. Biztosítja az alkalmazások számára is az egységes állomány- és perifériakezelést

APU	Aritmetic Processing Unit: Az alaplapon található segédprocesszor (koprocesszor v. társprocesszor), amely a lebegőpontos műveletek gyors elvégzésére képes
ARPANet	Az Internet elődje. 1969-ben indult a Defense Department's Advanced Research Projects Agency anyagi támogatásával
ASCII	American Standard Code for Information Interchange: Amerika szabványos kód információcserére. Összesen 128 különféle karaktert (betűket, számokat, különleges és vezérlő karaktereket) ábrázol, egyenként 7 bit + 1 paritásbit használatával. A mikroszámítógépekben a paritásbit alkalmazása helyett további 128 karaktert szoktak definiálni
ASPI	Advanced SCSI Programming Interface: továbbfejlesztett SCSI programozási interfész
AT	Advanced Technology - Fejlett technológia
ATX	Alaplap specifikáció, az energiaellátás és felépítés szabványosítására
AVI	Audio Video Interleave: Ebben az állományformátumban tárolja a "Video for Windows" a videoklipjeit. A név onnan származik, hogy a kép és hangadatokat ezekben az állományokban összesorolva tárolják. A képet és a hangot kis adagokban váltakozva rögzítik a tárolóeszközön
Basic	Beginner All-purpose Symbolic Instruction Code: Kezdők általános célú szimbólikus utasításkódja. Mintegy 30 változatot megért programozási nyelv
Baud	(Olv. bod) Egység, amely az adatátvitel sebességét méri. Egy baud egy bit átvitelét jelenti másodpercenként (Lásd még: bps). Ugyancsak a moduláció sebességének mértékegysége, értéke egy jelszintváltás másodpercenként
BBS	Bulletin Board System: Hirdetőtábla rendszer. Központ az üzenetek elektronikus tárolására. Modem segítségével érhető el. Ugyancsak egy kommunikációs szoftver, mely segítségével olvashatunk ill. írhatunk információt a partner számítógépén
BCC	Blind Carbon Copy (vakmásolat): Ha úgy akaruk elküldeni valakinek egy levél másolatát (e-mail - Internet), hogy az eredeti címzett erről ne tudjon, akkor a BCC: sorba kell a címet beírni. Ez a sor a címzettnél nem jelenik meg, tehát ő nem tudja, ki kapott még másolatot a levélből
BCD	Binary Coded Decimal: Binárisan kódolt decimális ábrázolás
BIOS	Basic Input Output System: Alapvető rendszerprogram a perifériák kezelésére

bit	Binary Digit: Kettes számrendszer számjegye: 0 vagy 1
BMP	BitMaP: A Windows pixelgrafikus (bittérképes) tárolási módszere
BNC	Koaxiális kábel csatlakozó
bps	Bit per second: Az egy másodperc alatt továbbított bitek számát adja. Az adatátvitel sebességének mértékegysége
CAD	Computer Aided Design: Számítógéppel támogatott tervezés
CAM	Computer Aided Manufacturing: Számítógéppel támogatott gyártás
CCITT	Comité Consultatif Internationale de Télégraphique et Téléphonique: Nemzetközi Táviró és Távbeszélő Bizottság nevének rövidítése. A bizottság a Nemzetközi Távközlési Unió (ITU) szerve, amely az ENSZ egyik szakosított szervezete. A CCITT a telefon és adatforgalmazó rendszereket az egész világra kiterjedően koordinálja. Műszaki ajánlásai gyakran nemzetközileg is elfogadott szabvánnyá válnak. Új neve ITU-T
CD-R	CD-Recordable: Egyszer írható CD kompaktlemez, 80 v. 120 mm, 210 vagy 540/650/700/800 MB
CD-ROM	Optikai, csak olvasható digitális kompaktlemez és meghajtó szabványa. 80 v. 120 mm-es CD olvasására alkalmas
CD-RW	CD-Rewritable: Újra írható Compact Disc (kompaktlemez)
CFG	Configuration. A konfigurációs fájlok szokásos kiterjesztése
CGM	Computer Graphics Metafile: Vektorgrafikus adatformátum
CIS	Contact Image Sensor: Lapolvasó érzékelőjének típusa. Egyetlen lapkát használ, egyszerű optikával és világító diódákkal
CISC	Complex Instruction Set Computer: Komplex utasításkészletű processzor (Lásd RISC)
CMOS	Complementary Metal Oxide Semiconductor: 1) Félvezető gyártási technológia. 2) A számítógép speciális tárolóegysége, amely információkat tárol a gép konfigurációjáról
CMYK	Cián, bíborvörös, sárga és fekete alapszínek, melyből a nyomtatók a színes képeket összeállítják
CNR	Communication and Networking Riser: Csatlakozóaljzat (slot) modem, hálózati kártya részére a számítógép alaplapján
COBOL	Common Business Orientated Language: Elsősorban gazdasági, ügyviteli feladatok megoldására alkalmas programnyelv. Ma már kevésbé használják
CP/M	Control Program / Monitor: Elavult operációs rendszer az Intel 8080 és 8085, valamint a Zilog Z80 processzorokkal működő számítógépekhez

CP852	Code Page Latin II: Kelet-európai kódtáblázat (lap), mely tartalmazza a magyar ékezetes karaktereket is (MSZ)
cpi	Characters per inch - Karakter/coll. A nyomtatási sűrűség mértéke
cps	Characters per second: Az adatátviteli sebesség mértékegysége
CPU	Central Processing Unit: Központi (vezérlő egység) processzor. A számítógép azon egysége, amely az utasítások értelmezését és végrehajtását vezérlő áramköröket tartalmazza
CRC	Cyclic Redundancy Check: Hibaellenőrző eljárás
DBF	Data Base File: Adatbázisok adatfájljainak szokásos kiterjesztése
DD	Double Density - Dupla sűrűség. Hajlékony mágneslemezek minőségjelzője
DDR	Double Data Rate: Kétszeres adatsebességű SDRAM
DHTML	Dynamic Hypertext Markup Language: a HTML kiterjesztése olyan új elemekkel, melyek a weboldalak tartalmának mozgalmassabbá tételét szolgálják (pl. mozgó feliratok, animációk), így nincs szükség a lassabb Java vagy ActiveX programokra
DIMM	Dual Inline Memory Module: kétoldalú memória modul (egység)
DIP	Dual In-line Package: IC tokozási mód ill. ilyen felépítésű kapcsoló
DLL	Dynamic Link Library: Program futása közben behívható modul
DMA	Direct Memory Access: Speciális adatátviteli eljárás, amely lehetővé teszi adatok közvetlen cseréjét az operatív memória és a periféria között anélkül, hogy a központi vezérlőegység beavatkozását igénybe venné. (UDMA - Ultra DMA)
DNS	Domain Name System: Az Interneten az IP-címeket és a domain-neveket összerendelő rendszer
DPI	Dots Per Inch: Pont/coll felbontás tús nyomtatók esetében
Draft	Vázlat minőségű nyomtatás (Piszkozat)
Drag& Drop	Húzz és engedj el: Kijelölés és mozgatás egérrel
Drag& Plot	Húzz és rajzolj, egérrel grafika becsúsztatása

DRAM	Dinamic Random Access Memory: (Dinamikus RAM) Olyan olcsó memória melynek elérési ideje hosszabb a RAM-énál és állandó frissítést igényel (dinamikus). Bitenként egy tranzisztort és egy kondenzátort tartalmaz. A kondenzátort 15 ms-onként újra kell tölteni
DRW	A Micrografx, a Charisma, a Designer vagy a Windows Draw programok vektorgrafikus adatformátuma
DS	Double Sided: (Dupla Oldalas) hajlékony mágneslemez jellemző
DTP	DeskTop Publishing: Kiadványszerkesztés
DVD	Digital Versatile Disc: Új CD szabvány, több információs réteggel is ellátható, típustól és kapacitástól függően mindkét oldaláról olvasható adathordozó. 4,7/9,4/17- GB adat tárolására képes
EAN kód	European Article Number Code: Árucikkek azonosítására használt, 8 v. 13 jegyű vonalkód szabványa
EBCDIC kód	Főleg nagyszámítógépes rendszerekben használt 8 bites kódkészlet, betűk, írásjelek és vezérlőkarakterek kódolására
EDO	Extended Data Out: Memória típus
EDO-DRAM	Extended Data Output DRAM: 35 ns-os RAM, nem kell frissíteni, vezérlését az Intel Triton chip támogatja
EIDE	Enhanced IDE: Továbbfejlesztett IDE Winchester kontrollor szabvány
e-mail	Elektronikus posta
EMM	Expanded Memory Manager: Kibővített memóriakezelő
EMS	Expanded Memory Specification: Kibővített memória (max. 32 MB)
ENIAC	Electrial Numerical Integrator and Computer: J. W. Mauchly/J. P. Eckert (tanácsadó: Neumann János) által 1946-ban üzembehelyezett első elektrónikus számítógép
EOF	End Of File: Fájl vége
EPROM	Erasable Programmable Read Only Memory: Törölhető és programozható ROM
ESC	Escape: Menekülés, vagy Epson Standard Code for printers - Nyomtató operációs rendszer
EXE	Execute: Jelentése - végrehajt

FAQ (GYIK)	Frequently Asked Questions: GYakran Ismételt Kérdések
FAT	File Allocation Table: Állományok elhelyezési táblázata. Mágneslemez foglaltsági térképe a szabad, foglalt és hibás clusterek jelölésére, mely a lemezen a 0. oldal 0. sávja 2. szektorától kezdve helyezkedik el, általában két példányban
FD	Floppy Disk: Hajlékony mágneslemez
FDD	Floppy Disk Drive: Hajlékony lemezmeghajtó
FF	Form Feed: Lapdobás
FLOPS	Floating-point Operations Per Second: Lebegőpontos művelet/másodperc
Floptical	21 MB kapacitású magneto-optikai cserélhető tároló lemez, melynek meghajtója kezeli a 1.44 MB-os mágneslemezeket is, vezérlője SCSI
FMP	Fast Page Mode: elsősorban a régebbi 486-os gépekben használt RAM. Ezt a DRAM (Dinamic Random Access Memory) és az EDO (Extended Data Out), majd a SDRAM (Synchronized DRAM) memóriák követték
FPU	Floating Point Unit: Lebegőpontos processzor
FSB	Front Side Bus: A CPU-t az operatív tárral összekötő adatvezeték
FTP	File Transfer Protocol: Egy program az állományok átvitelére a Hálózaton
Gateway	Átjáró: Berendezés, amely két különböző protokollt használó hálózat között továbbítja az információt
GB	Gigabyte. Kapacitás-egység. Értéke 2^{30} bájt, kb. egy milliárd bájt
GDI	Graphics Device Interface: Windows nyomtatónyelve, közvetlen a képernyő információit nyomtatja
GIF	Graphic Interchange Format (A CompuServe cég pixelgrafikus adatformátuma.)
GNU	UNIX kompatibilis, ingyenes operációs rendszer kifejlesztésére létrejött amerikai alapítvány
GPS	Global Positioning System: Műholdas hely-(koordináta) meghatározás

GPT	<p>Globálisan egyedi azonosítók partíciós táblája. Itanium alapú számítógépeken az EFI (Extensible Firmware Interface) csatoló által használt lemezparticionálási séma. Előnye a fő rendszertöltő rekordon (Master Boot Record, MBR) alapuló partícionálással szemben az, hogy lehetővé teszi lemezenként akár 128 partíció létrehozását; támogatja továbbá az akár 18 exabájtos (azaz 18 trillió bájtos) kötetméretet, elsődleges és tartalék partíciós tábla használatát a redundancia biztosítása érdekében, valamint az egyedi lemez- és partícióazonosítókat (GUID)</p>
GSM	<p>Global System for Mobil communication: Mobil Távközlés Általános Rendszere. Jelenleg kiépítés alatt álló egységes Európai digitális rádiótelefon rendszer a 900 MHz-es frekvenciasávban. A rendszer beszéd szolgáltatásokon kívül a tervek szerint fakszimile és mobil számítógépes kommunikációt is biztosítani fog. A plusz szolgáltatásokon kívül az előfizetők részére nagy előny a hagyományos analóg készülékekkel szemben, hogy a rendszerhez csatlakoztatott telefon és adatterminálok Európa egész területén használhatók lesznek</p>
GUI	<p>Graphical User Interface: Grafikus felhasználói (kezelő) felület</p>
hang up	<p>Jelentése - visszatesz. Amikor egy modem "leteszi a kagylót"</p>
HD	<p>High Density: - Magas sűrűség. Hajlékonylemez minőségjelzője</p>
HDD	<p>Hard Disk Drive: Merevlemez meghajtó</p>
HLP	<p>Help: Segítség. Súgó fájlok kiterjesztése</p>
HMA	<p>High Memory Area: Felső memória terület 1024-1088 K között</p>
HTML	<p>Hypertext Markup Language: A Web oldalak készítéséhez használatos kódolási rendszer, amivel hipertext kapcsolatok, beillesztett képek stb. definiálhatók. Az Internet WWW-jének szabványos hypertext leíró nyelve</p>
HTTP	<p>Hypertext Transport (Transfer) Protocol: A World-Wide Web szolgáltatók egymáshoz és a felhasználókhöz való kapcsolásához használt rendszer, kommunikációs szabvány, hypertext dokumentumok gyors és hatékony megjelenítésére tervezték</p>
hyperlink	<p>Egy olyan megoldás, amivel két Internet információforrás összekapcsolható úgy, hogy a felhasználó csak rámutat egy szóra vagy képre, és ezzel aktivizálja az utalást</p>

Hz	Hertz: a frekvencia mértékegysége: egy rezgés (impulzus) másodpercenként
I/O	Input / Output: Bemenet / Kimenet
IBM	International Business Machines: Nemzetközi üzleti célú gépek
IC	Integrated Circuit: Integrált áramkör
ICO	Icon - ikon- (piktogram) állományok kiterjesztése
IDE	Integrated Disk Environment v. Integrated Drive Electronics: Winchester kontrollor szabványa, a Conner Peripherals cég fejlesztése, ahol a vezérlő áramkörök nagyobb része a meghajtón van
IMAP	Internet Message Access Protocol: lehetővé teszi a kiszolgáló levelezőszerverén tárolt üzenetek elérését
IMG	Image: Kép. GEM program pixelgrafikus adatformátuma
IP	Internet Protocol
IPX	Internetwork Packet eXchange: Novell NetWare hálózati protokoll
IRC	Internet Relay Chat: Írásos csevegés, hasonló a talk-hoz, ám többen társalognak egyidőben
IRQ	Interrupt Request: Megszakítás-kérés
ISA	Industry Standard Architecture: A CPU és a perifériák összekötésére szolgáló adatsín (busz) szabványa, 16 bit/8 MHz, 6 MB/sec
ISDN	Integrated Services Digital Network: Olyan, mint a hagyományos telefonvonalas összeköttetés, de más (drágább) modemet használ és sokkal gyorsabb
ISO	International Standard Organization: Nemzetközi Szabványügyi Szervezet
Itanium	64 bites memóriacímzésű Intel mikroprocesszor
JAVA	A SUN Microsystem által kifejlesztett objektumorientált, hardver- és szoftverfüggetlen programozási nyelv, interaktív Internet-kezelő
Java-Script	A JavaScript (hívják Mocha és Netscape Scripting Language néven is) olyan programozási nyelv, amelynek segítségével a HTML-oldalt programozhatjuk. Átmenet az egyszerű HTML-oldalak és a Java között
JPEG	Joint Photographic Experts Group: Tömörítő eljárás álló videó képek tárolására. 8x8 képpontos blokkokra bontja a képet és a blokkok 64 pixelének jellemzőit a bal felső sarokban levő képponthez való viszonyuk alapján írja le. 20:1 tömörítési arány érhető el

Jumper	Átkötő kapcsoló (sor)
KB	Kilobyte = 1024 Byte
Kbit	Kilobit = 1024 bit
Kernel	Mag. Az operációs rendszer legalsó szintje, központi része. Meghatározza, hogy mikor melyik programrész fusson, vezérli a perifériákat, biztosítja a fájlrendszert
LAN	Local Area Network: Helyi hálózat. Általában egy épületen vagy telephelyen belüli számítógép hálózat
LCD	Liquid Cristal Display: Folyadék-kristályos kijelző (képernyő)
LDAP	Lightweight Directory Access Protocol: Különböző platformokon megvalósított címtárak, adattárak szabványos közös kezelője
LED	Light Emitting Diode - Világítódioda (Fénydioda)
LF	Line Feed: Soremelés
LIM	Lotus - Intel - Microsoft
log on/ log in	Bejelentkezés egy szolgáltató gépre vagy egy nyilvános hálózati ellátó rendszerébe
LQ	Letter Quality: Levél minőségű nyomtatás
LSI	Large Scale Integration: magas integráltsági fokú áramkör
MAC	Macintosh
MAN	Metropolitan Area Network: Nagyvárosi telekommunikációs hálózat, mely kb. 50 km átmérőjű kör lefedésére alkalmas. Használják mind adat, mind beszéd, video stb. átvitelére
MB	Magabyte = 2 ²⁰ Byte (1 048 576 Byte)
MBR	Master Boot Record: A merevlemez első szektora. Itt található a rendszerindító program és a partíció (lemezfelosztás) információja
MCI	Media Control Interface: A Windows által használt közegvezérlő multimédiás perifériák és állományok kezelésére
MD	Make Directory: Új könyvtár (mappa) létrehozása
MDA	Monochrom Display Adapter
MEM	Memory
MGA	Multimedia Graphics Architecture: 64 bites videó gyorsító kártya

MHz	Megahertz
MIDI	Musical Instruments Digital Interface: Szabványos zenei szintetizátor leírnyelv és adatátviteli protokoll, amely egységes adatcserét tesz lehetővé a számítógép és az elektronikus zenei eszközök között
MIME	Multipurpose Internet Mail Extensions: Olyan szoftver, amelynek segítségével Internetes levelekhez nem szöveges fájlokat lehet csatolni
MIPS	Million Instruction Per Second: Másodpercenként végrehajtott millió utasítások száma
Modem	Modulátor - Demodulátor: Számítógépeket a soros porton telefonvonal segítségével összekötő vagy a számítógépbe bővítőkártként beszerelt berendezés
MPC	Multimedia Personal Computer
MPEG	Motion (Moving) Pictures Experts Group: Tömörítő eljárás mozgó (30 képkocka/sec) videó képek tárolására, minimum 50:1 a tömörítési arány
Multi- mídia	Olyan konfiguráció, amely tartalmaz CD-ROM-ot, sztereó hangkártyát hangszórókkal, MIDI interfészt, mikrofon bemenetet és nagyfelbontású színes VGA vagy SVGA kártyát
Multipro- cessing	Egy számítógépben több processzor alkalmazása, párhuzamos, szimultán - egyidejű - programfuttatás megvalósítása
Multitas- king	Több feladat párhuzamos végrehajtása ugyanazon a számítógépen
NDS	Novell Directory Service: A számítógépes hálózat komponenseinek adatait hierarchikus adatbázisban (címtárban) tároló rendszer
Network	Hálózat. Két vagy több számítógépet összekötő kommunikációs rendszer
NLQ	Near Letter Quality: Közel levél minőségű nyomtatás
Notebook	Könyvméretű hordozható számítógép
NTFS	Windows NT, Windows XP állományrendszere
OCR	Optical Character Recognition: Optikai karakter-felismerés
offline	Amikor a számítógép nincs hozzákapcsolódva a Hálózathoz, ill. egy szolgáltató géphez sem, akkor offline állapotban van

OLE	Object Linking and Embedding: Különböző programokból származó adatrészletek összekapcsolása és kezelése
On-line	Közvetlen vonali kapcsolat. Az az állapot, amikor a számítógép hozzá van kapcsolódva egy hálózati szolgáltatóhoz, faliújság rendszerhez vagy nyilvános hálózati ellátóhoz
OOP	Object Oriented Programming: Objektum orientált programnyelv
OpenGL	A Silicon Graphics programozási környezete két- és háromdimenziós alkalmazások fejlesztéséhez
OS	Operating System: Operációs rendszer
OS/2	IBM PC grafikus kezelőfelületű, multitaszkos, 32 bites operációs rendszer
Overlay	Többszörös memória felhasználás
Palmtop	Palm = tenyér. Tenyérynvi számítógép
Paritásbit	Valamely bitvektorhoz rendelt redundáns - vagyis új információt nem tartammazó - bit, amely a bitvektor átvitelénél a vevőoldalon hibajelzést tesz lehetővé. Értéke 0 vagy 1, amely attól függ, hogy a bitvektor összege páros vagy páratlan
PAS	Pascal fájlok kiterjesztése
PC	Personal Computer: Személyi számítógép
PC/AT	Personal Computer / Advanced Technology
PC/XT	Personal Computer / eXtended Technology
PCI	Peripheral Component Interconnect: Az Intel által kifejlesztett processzorfüggetlen adatsín (busz), mely magasabb frekvencián dolgozik, mint elődje (ISA). A CPU és a perifériák összekötésére szolgál: 64 bit/33 MHz, 120 MB/s
PCMCIA	Personal Computer Memory Card International Association: Szabványos memóriakártya bővítő és egyéb periféria csatlakozó (68 pólus). Típusai: I (3.3 mm), II (5 mm) és III (10 mm vastag)
PCX	ZSoft Paintbrush pixelgrafikus adatformátuma
PIF	Program Information File: Információs fájl egy adott programhoz, amely a nem Windows-os alkalmazás, Windows alatti futási környezetét írja le
Pixel	Picture Element: Képpont

Plug & Play	Csatlakoztasd és (játssz) használd: Automatikus hardverfelismerés és -konfigurálás
plug-in	Ez az angol kifejezés a böngészőbe beépülő segédprogramokat takar, amelyek segítségével speciális tartalmakat működtethetünk a böngészőnkkel. Például audio vagy video fájlokat játszhatunk le egy külön erre alkalmas szoftver elindítása és a böngésző bezárása nélkül. Ezek a tartalmak MIME (Multipurpose Internet Mail Extensions) típusú fájlok, melyek közös jellemzője, hogy nem szöveges formátumúak. A képektől (például .gif) az audio fájlok (például .wav) keresztül a videoinzertekig (például .avi) sokféle MIME fájl létezik, közös jellemzőjük, hogy alkalmazhatóak az internetböngészőn, "applikálva"
PNG	Portable Network Graphics: grafikai formátum, amelyet kifejezetten hálózati használatra fejlesztettek ki, figyelembe véve annak minden specialitását, ám ma még egyetlen nagy böngésző sem támogatja
POP3 server	Post Office Protocol: Incoming - Bejövő levél szerver / a postahivatal funkcióját ellátó szerver neve, az a cím, ami az e-mail címében a @ után szerepel
POST	Power-On Self Test - Önteszt a bekapcsolás után
Post-Script	Vektororientált lapleíró programozási nyelv lézernyomtatók vezérléséhez (Adobe cég). A nagyítás és kicsinyítés nem jár torzítással
PPP	Point to Point Protocol: Az Internet eléréséhez általánosan használt szabványos protokoll a soros porton keresztül történő kommunikációhoz. Meghatározza az adatcsomagok átvitelének módját a modemet használva
PROLOG	Programming in Logic: Logikai programnyelv, amelyet elsősorban a mesterséges intelligencia-kutatásokhoz használnak
PS/2	Personal System/2. Az IBM 1987-ben az IBM PC/AT leváltására tervezett gépcsalád
QWERTY	Angolszász billentyűkiosztás
QWERTZ	Európai billentyűkiosztás
RAM	Random Acces Memory: Közvetlen hozzáférésű memória (írható-olvasható), csak feszültség alatt tartja meg az információt
RDRAM	Rambus DRAM: A RambusInc. Cég által kifejlesztett gyors-elérésű dinamikus memória. A memóriamodul neve RIMM

Real-Time	Valós idejű feldolgozás
REM	Remark: Kommentár
RGB	Red-Green-Blue = Vörös-Zöld-Kék. A három alapszín átvitelével és szuperpozíciójával előállított színes kép
RISC	Reduced Instruction Set Computer: Csökkentett utasításkészletű processzor típus
ROM	Read Only Memory: Csak olvasható memória, feszültség nélkül is tárol
Router	Útkiválasztó: Berendezés, amely két vagy több azonos protokollt használó, térben elkülönülő lokális hálózat között a megfelelő helyre továbbítja az információt
RS-232	Interfész-szabvány a soros illesztés mechanikai, elektromos, funkcionális és eljárási paramétereire
RTF	Rich Text Format: gazdag szövegformátum
SAA	Systems Application Architecture: Szabványos felhasználói felület (IBM)
Scanner	Papírról szöveget illetve grafikát a számítógépbe beolvasó eszköz
SCSI	Small Computer System Interface: Multitaskingos periféria I/O vezérlő szabványa, amely winchesterek, CD-ROM-meghajtók, floppy-disk-meghajtók és más tárolóeszközök csatlakoztatására szolgál. Az SCSI csatlakozó-kártya egyszerre max. 7 (vagy 15) eszközzel képes fenntartani a kapcsolatot. Adatátviteli sebessége 1,5 MB/s. A Fast SCSI sebessége 10 MB/s
SD	Single Density: Egyszeres sűrűség. Elavult floppy minőségjelző
SDRAM	Synchronized DRAM: Gyors memória-modul típusneve. Ugyanazon a frekvencián dolgozik, mint a processzor vezérlősine
server	Olyan számítógép, mely információkat vagy teljes állományokat tud automatikusan elküldeni megfelelően szövegezett e-mail-kérésekre válaszul
Share-ware	Szabadon terjeszthető program, mely sok esetben csak demo, vagy csökkentett teljesítményű változat, gyakran csak megadott ideig működik és általában az adathordozó árát és a regisztrációs díjat kell megfizetni. - A Hálózaton szabadon hozzáférhető szoftver, ám ha használni akarjuk, akkor illik küldeni egy megszabott összeget arra a névre és címre, ami a szoftverrel együtt terjesztett file-ban megtalálható

SIMM	Single In-line Memory Module: Egyoldalú-érintkezős memória chip
SIPP	Single Inline Plugging Package: Memóriatokozási szabvány, nem kompatibilis a SIMM-el
SLIP	Serial Line Internet Protocol. Egy olyan szabvány, amivel a telefonvonalon át kapcsolódó otthoni számítógépek is Internet gépekké tehetők. A számítógépek TCP/IP-is kommunikációját biztosítja modem felhasználásával
SMTP	Simple Mail Transport Protocol – Az Interneten elektronikus levelek küldésére használt szabványos protokoll
SMTP server	Outgoing - Kimenő levél szerver
Spooler	Háttérnyomtatást lehetővé tevő program
SQL	Structured Query Language: strukturált lekérdezőnyelv. Használható a relációs adatbázisok, mint például az Access adatbázisok lekérdezésére, frissítésére és karbantartására
SRAM	Gyorselérésű memória. Az SRAM mikroséma statikus RAM. Nem igényel frissítést, adatelérési ideje 25 ns. Bitenként négyhat tranzisztort tartalmaz. Előállítása drágább, mint a DRAM memória előállítása. Ebből készítik a külső és a processzorok belsejében lévő gyorsítótárat
SVGA	SzuperVGA grafikus kártya szabvány 640x480-tól 1024x768 pixel-ig, 16 illetve 256 színtől, a video RAM méretétől függően
Sysop	System operator: Rendszerfelügyelő (kezelő)
Tab	Tabulator
Talk	A talk program segítségével az Interneten keresztül két felhasználó "beszélgetést" folytathat egymással
TCP/IP	Transmission Control Protocol / Internet Protocol: Az a speciális szabvány, illetve rendszer, amely az Internet magját alkotó hálózatokon az információk átvitelét előírja/végzi. (UNIX környezet hálózatkezelő protokollja.)
Telnet	Ezzel a programmal lehet az Interneten más számítógépekhez hozzákapcsolódni
TGA	A True Vision Targa cég pixelgrafikus adatformátuma
TI	Texas Instruments
TIFF	Aldus cég (Tagged Image File Format) pixelgrafikus adatformátuma

TIGA	Texas Instruments Graphics Architecture
TMP	Temporary - Ideiglenes
TOC	Table Of Contents: Tartalomjegyzék
Token Ring	IBM által kifejlesztett vezérjeles protokollú, gyűrű topológiájú hálózat
TPI	Track Per Inch: Sáv/coll adatrögzítési sűrűség
Trackball	Hanyattegér. A tetején lévő golyó forgatásával lehet a képernyőn látható mutatót mozgatni
True Type	Fontok skálázására és nyomtatására szolgáló technológia, melyben a karakterek ugyanolyan formában jelennek meg a nyomtatón, mint a képernyőn
TSR	Terminate but Stay Resident: Memóriarezidens program
ULS	User Location Service: Keresőszolgáltatás az Interneten
UMB	Upper Memory Block: Felső memória terület, 640-1024, általában 768 és 960 KB között
UNIX	Időosztásos, multitasking (többfeladatos), multiprocesszoros, többfelhasználós, osztott adatállományokat használó, nyílt operációs rendszer
UPS	Uninterruptable Power Supply: Szünetmentes áramforrás
URL	Uniform (Universal) Resource Locator: Egységes Forrás Azonosító. A World-Wide Web rendszerénél használt címzés a hálózati információforrásokhoz
USB	Universal Serial Bus
VESA	Video Electronics Standards Association: A CPU és a perifériák összekötésére szolgáló adatút (sín, busz) szabványa, 32-64 bit/40-50 MHz, 132-> MB/sec. (Ugyanaz a cég neve is)
VGA	Video Graphics Array: Grafikus kártya szabvány 320x200 vagy 640x480 pixel, illetve 256 vagy 16 szín a videó RAM méretétől függően
VRML	Virtual Reality Markup Language: Virtuális Valóság. Ez a technika dolgok, tárgyak valósághű megjelenítését teszi lehetővé. A Virtuális Valóság segítségével akár egy távoli múzeumban akár az emberi testben sétát tehetünk, a web-oldalon keresztül
VxD	Virtuális eszközmeghajtó

WAN	Wide Area Network: Széles területre kiterjedő hálózat. Általában egy vagy több országot, országrészt lefedő számítógép hálózat
WAP	Wireless Application Protocol: "drótnélküli alkalmazási protokoll". A mobiltelefonnal foglalkozó cégek által kidolgozott szabvány, amely a WWW-hez hasonló egységes dokumentumelérést biztosít mobiltelefonról
WINS	Windows Internet Naming Service
WKS	Worksheet - Munkatábla
WMF	Windows metafájl vektorgrafikus adatformátum
WMI	Windows Management Instrumentation szolgáltatás
WORM	Write Once Read Many: Egyszer írható, tetszőlegesen olvasható optikai tároló
WPG	Word Perfect pixel-, vagy vektorgrafikus adatformátuma
WRI	Write szövegformátum
WWW	World-Wide Web vagy csak Web vagy WWW (világméretű háló)
WYSIWYG	What You See Is What You Get: Amit látsz azt kapsz (pl. nyomtatón)
X modem	Állandó (128 bájt) méretű blokkal dolgozó adatátviteli protokoll
XGA	eXtended Graphics Array: Grafikus kártya szabvány, 640x480-tól 1280x1024 pixel-ig, illetve 16.7 milliótól 256 színig a video RAM méretétől függően
XML	XML = eXtensible Markup Language: a weben adatok leírására és továbbítására használt szabványos nyelv
XMM	eXtended Memory Manager: Kiterjesztett memóriakezelő
XMS	eXtended Memory Specification: Kiterjesztett memória, az 1088 K felett
XT	eXtended Technology: Bővített technológia
Z modem	Változó blokkmérettel dolgozó adatátviteli protokoll

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. **ПРОГРАММА** для середніх закладів освіти: **ОІОТ, 1996**
2. **Руденко В.Д. та ін.:** Інформатика. Практичний курс (підручник). Изд. Феникс, 1998.
3. **Верлань А.Ф., Апатова Н.В.:** Інформатика (підручник). Изд. Освіта. 1999.
4. **Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos:** Matematika. Bp.1983.
5. **Rónyai Lajos-Ivanyos Gábor-Szabó Réka:** Algoritmusok.
6. **Rozgonyi-Borus Ferenc:** RAM-ba zárt világ. Bp.1998.
7. **Dr.Turjányi Sándor:** Kombinatorika és gráfelmélet. Bp. 1998.
8. **Szűcs Péter:** Elektronika mindenkinek. Bp.1984.
9. **Pluhár Gábor:** Válogatás az informatikai szakirodalom tanulmányozásához. MEK. 1995.
10. **Р. Токхейм:** Основы цифровой электроники. М. 1988.
11. **Lutter András:** Haladó programozás. Bp.1999.

Jegyzetek
